

完爆期末高代 2 模拟卷一答案

一、单选题。

1. 设 φ 是三维行向量空间上的变换, 下列 φ 不是线性变换的是().

(A) $\varphi(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 - a_2 + a_3, a_2 + 5a_3, a_1 - a_3)$

(B) $\varphi(a_1, a_2, a_3) = (a_1^2, a_2^2, a_3^2)$

(C) $\varphi(a_1, a_2, a_3) = (0, a_1, 0)$

(D) $\varphi(a_1, a_2, a_3) = (3a_3, 3a_2, 3a_1)$

解 应选择 (B) .

2. 设 F 上的三维列向量空间 V 上线性变换 φ 在基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的表示矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

则 φ 在基 $\{e_3, e_2, e_1\}$ 下的表示矩阵是().

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解 应选择 (C) . 直接计算即可.

3. 设 V 是 n 维向量空间, φ 和 ψ 是 V 上的线性变换, 则它们的像空间维数相同的充要条件是().

(A) φ 和 ψ 都是可逆变换 (B) φ 和 ψ 的核空间相同

(C) φ 和 ψ 的像空间相同 (D) φ 和 ψ 在任一组基下的表示矩阵的秩相同

解 应选择 (D) , 注意像空间维数相等并不意味着像空间相同, 因此不能选 (C) . 同理也不应选择 (B) .

4. 设 V 是 n 维向量空间, 则 V 上线性变换全体组成的向量空间的维数为().

- (A) n (B) $\frac{1}{2}n(n+1)$ (C) n^2 (D) 无穷大

解 应选择 (C). $L(V)$ 同构于 n 阶矩阵组成的向量空间, 因此维数等于 n^2 .

5. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 为线性空间的两个基, 且

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n)A \quad ①$$

又对 $\alpha \in \mathbf{R}^n$ 有 $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$

记 $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)B$, 则 ().

- (A) $B = A^T$ (B) $B = A^*$ (C) $B = (A^T)^{-1}$ (D) $B = A$

解 应选 (C).

分析 令 $x^T = (x_1, \dots, x_n)$, $y^T = (y_1, \dots, y_n)$ 则有 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)x = (\beta_1, \dots, \beta_n)y$. 从而,

由式①得 $(\beta_1, \dots, \beta_n)y = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)x = (\beta_1, \dots, \beta_n)Ax$

即 $y = Ax$, 故 $(x_1, \dots, x_n) = x^T = y^T(A^T)^{-1} = (y_1, \dots, y_n)(A^T)^{-1}$

故 $B = (A^T)^{-1}$.

6. 下列结论正确的是 ().

- (A) n 阶矩阵 A 和 B 有相同的行列式因子, 则它们有相同的最小多项式
 (B) 特征多项式和最小多项式分别相同的矩阵必相似
 (C) 两个矩阵若特征值相同, 则它们相似
 (D) 相抵的矩阵必相似

解 若 A 和 B 有相同的行列式因子, 则不变因子也相同, 而极小多项式是最后一个不变因子, 故相同. 选择 (A).

二、填空题.

1. 在线性空间中, $k0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

根据线性空间定义中加法"和数量乘法"满足的八条规则进行证明.

证 (1) $k0 = k(\alpha + (-\alpha)) = k\alpha + k(-\alpha) = k\alpha + k(-1)\alpha = (k + (-k))\alpha = 0\alpha = 0$.

2. 在 P^4 中, 向量 $\xi = (1, 2, 1, 1)$ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1), \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1), \varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1),$

$\varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1)$ 下的坐标 .

解 令 $\xi = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3 + k_4\varepsilon_4$,

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1, \\ k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 2, \\ k_1 - k_2 + k_3 - k_4 = 1, \\ k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = 1, \end{cases}$$

解得 $k_1 = \frac{5}{4}, k_2 = \frac{1}{4}, k_3 = -\frac{1}{4}, k_4 = -\frac{1}{4}$.

所以向量 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标是 $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

3. 在 $P[x]$ 中, $\varphi f(x) = f'(x)$, $\phi f(x) = xf(x)$. $\varphi\phi - \phi\varphi =$ _____.

证 任取 $f(x) \in P[x]$, 则有

$$(\varphi\phi - \phi\varphi)f(x) = \phi f(x) - \varphi\phi f(x) = \phi(xf(x)) - \varphi(f'(x))$$

$$= f(x) + xf'(x) - x f'(x) = f(x),$$

所以结果为恒等映射.

4. 在 P^3 中, φ 定义如下, $\varphi\eta_1 = (-5, 0, 3)$, $\varphi\eta_2 = (0, -1, 6)$, $\varphi\eta_3 = (-5, -1, 9)$. 其中

$\eta_1 = (-1, 0, 2)$, $\eta_2 = (0, 1, 1)$, $\eta_3 = (3, -1, 0)$, 求 φ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$,

$\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵_____.

解 因为 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 所以

$$\varphi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

但又已知 $\varphi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{20}{7} & -\frac{20}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{27}{7} & \frac{18}{7} & \frac{24}{7} \end{pmatrix},$$

故 φ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{20}{7} & -\frac{20}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{27}{7} & \frac{18}{7} & \frac{24}{7} \end{pmatrix}.$$

5. 在 $\mathbf{R}^4$ 中求 $\alpha = (1, 2, 2, 3), \beta = (3, 1, 5, 1)$ 之间的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle =$ _____.

解 利用公式 $\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$ 解题.

$$\cos \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} = \frac{18}{3\sqrt{2} \times 6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{4}$.

三、解答题

1. 设 $\mathbf{P}^{2 \times 2}$ 的两个基为

$$(I) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(II) B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵.

(2) 求在基(I)与基(II)下有相同坐标的矩阵.

解 (1) 取 $P^{2 \times 2}$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, 则有

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})C_1, \quad (B_1, B_2, B_3, B_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})C_2$$

其中

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{于是} \quad (B_1, B_2, B_3, B_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4)C_1^{-1}C_2 = (A_1, A_2, A_3, A_4)C$$

即由基(I)到基(II)的过渡矩阵为

$$C = C_1^{-1}C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 设 $A \in P^{2 \times 2}$ 在基(I)与基(II)下的坐标均为 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, 则由坐标变换公式

得 $x = Cx$, 即 $(C - E)x = 0$, 可求得齐次线性方程组的通解为

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = k, \quad x_4 = 0 \quad (k \text{ 任意})$$

$$\text{于是} \quad A = 0A_1 + 0A_2 + kA_3 + 0A_4 = kA_3 = k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (k \text{ 任意})$$

2. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $R^{2 \times 2}$ 的子空间 $W = \{X \mid AX = XA, X \in R^{2 \times 2}\}$ 的基与维数.

解 设 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in W$, 则由 $AX = XA$, 得

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 & x_2 + 3x_4 \\ 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 3x_1 + 2x_2 \\ x_3 & 3x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

比较分量得齐次线性方程组

$$3x_3 = 0, \quad -3x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad -3x_3 = 0$$

该方程组的通解为 $x_1 = -k_1 + k_2, \quad x_2 = 3k_1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = k_2 \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$

于是
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -k_1 + k_2 & 3k_1 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in W$, 且易证 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ 线性无关. 故 W 是

2 维的. 且 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ 是 W 的一个基.

3. 已知曲面 $2x^2 + ay^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 3$ 可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

化为椭球面 $u^2 + v^2 + bw^2 = 3$, 求 a, b 的值和正交矩阵 P .

解 由条件可知二次型的相伴实对称矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P'AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & b \end{pmatrix}.$$

由 $\text{tr}A = 2 + a + 2 = 1 + 1 + b$ 可得 $b = a + 2$, 再由 $|A| = b$ 可得 $b = 3a - 2$, 故 $a = 2, b = 4$.

可求出特征值 1 的特征向量为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)', \alpha_2 = (-1, 0, 1)'$; 特征值 4 的特征向量为

$\alpha_3 = (1, 1, 1)'$. 利用 Gram-Schmidt 方法将 α_1, α_2 正交化, 然后再将两两正交的 3 个特征向量

单位化, 最后得到正交矩阵 $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 使得 $P'AP = \text{diag} \{1, 1, 4\}$.

4. 设 A 是数域 P 上一个 $n \times n$ 矩阵, 证明: A 与 A^T 相似.

证 A 与 A^T 相似的充要条件是它们有相同的不变因子.

因为 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - A^T$ 对应的 k 阶子式互为转置, 因此对应的 k 阶子式相等.

这样 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - A^T$ 有相同的各阶行列式因子, 从而有相同的不变因子, 故 A 与 A^T 相似.

四、证明题

1. 设 φ 是向量空间 V 上的线性变换且 $\varphi^2 = I$, 但 φ 本身不是恒等映射 I . 令 $U = \{v \in V \mid \varphi(v) = v\}$, $W = \{v \in V \mid \varphi(v) = -v\}$. 求证: U, W 都是 V 的子空间且 $V = U \oplus W$.

证 容易验证 U 及 W 是子空间, 现证明 V 是这两个子空间的直和. 首先 $W \cap U = 0$ 是显然的. 因此只需证明 $V = U + W$ 即可, 设 v 是 V 中任一向量, 令 $u = \frac{1}{2}(v + \varphi(v))$, $w = \frac{1}{2}(v - \varphi(v))$, 则由 $\varphi^2 = I$ 容易验证, $\varphi(u) = u$, 即 $u \in U$; $\varphi(w) = -w$, 即 $w \in W$. 注意到 $v = u + w$, 故 $V = U + W$ 成立.

2. 证明

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{pmatrix}.$$

的不变因子为其中. $\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-1 \text{ 个}}, f(\lambda)$, 其中 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$.

证 将 $A(\lambda)$ 的第 $2, 3, \dots, n$ 行的 $\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}$ 倍都加到第一行, 就有

$$|A(\lambda)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix} = f(\lambda),$$

于是, $D_n(\lambda) = f(\lambda)$, 在 $A(\lambda)$ 中划去第 1 行与第 n 列后剩下的 $n-1$ 阶子式为 $(-1)^{n-1}$,

故 $D_{n-1}(\lambda) = 1$, 从而 $D_{n-2}(\lambda) = \cdots = D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$, 所以 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1, d_n(\lambda) = f(\lambda).$$

3. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是三维欧氏空间中一组标准正交基, 证明:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \alpha_2 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3), \alpha_3 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$$

也是一组标准正交基

$$\text{证 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A,$$

其中

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

因为 $AA^T = E$, 即 A 是正交矩阵, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也是标准正交基.