

完爆期末高代 2 模拟卷二答案

一、单选题。

1. 若 A, B 是正交矩阵, k 是非零实数, P 是可逆矩阵, 则().

- (A) $A+B$ 也是正交矩阵 (B) kA 也是正交矩阵
(C) AB 也是正交矩阵 (D) $P^{-1}AP$ 也是正交矩阵

解 应选择 (C) .

2. 下列结论正确的是().

- (A) 若非零向量 u, v 正交, 则 u, v 线性无关
(B) 若向量 v_1 和 v_2 正交, v_2 和 v_3 正交, 则 v_1 和 v_3 正交
(C) 若 U, W 是欧氏空间 V 的子空间且 $U \cap W = 0$, 则 U 和 W 正交
(D) 若 U, W 是欧氏空间 V 的子空间, 适合 $U \cap W = 0$ 且 $\dim V = \dim U + \dim W$,

则 U 是 W 的正交补

解 正交向量组线性无关, 故选择 (A) .

3. 设 φ, ψ 是 n 维向量空间 V 上的线性变换, 它们适合条件() 时, 必有 $\varphi = \psi$.

- (A) 它们的像空间和核空间分别相同
(B) 对 V 中某 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 均有 $\varphi(\alpha_i) = \psi(\alpha_i), i = 1, \dots, n$
(C) φ, ψ 都是可逆变换
(D) 它们的秩相同

解 应选择 (B) . V 中任意 n 个线性无关的向量都可组成一组基, 两个线性变换在基上作用相同则必相等.

4. n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是().

- (A) $A(\lambda) \neq 0$ (B) $|A(\lambda)| \neq 0$
(C) $|A(\lambda)|$ 是一个非零常数 (D) $A(\lambda)$ 的法式中主对角线上的元素全不等于零

解 (A) 及 (D) 显然不对, 注意 $|A(\lambda)|$ 不为零时仍可能是一个非常数多项式, 这时 $A(\lambda)$ 不是可逆 λ -矩阵. 因此正确的选择是 (C) .

5. 八阶矩阵 A 的初等因子组为 $(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^3, \lambda$, 则 A 的不变因子组为().

- (A) $1, 1, 1, 1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^3$
 (B) $1, 1, 1, 1, 1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda(\lambda+1)^3$
 (C) $1, 1, 1, 1, 1, (\lambda-1)^2, \lambda(\lambda-1)^2, (\lambda+1)^3$
 (D) $1, 1, 1, 1, 1, 1, (\lambda-1)^2, \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3$

解 由计算可知应选择 (D) .

6. 设 A 是三阶矩阵, A 的极小多项式是 $(\lambda-1)^2$, 则 A 的 Jordan 标准型是().

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 (C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解 应选择 (B) .

二、填空题

1. 在线性空间中, 有 $k(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$.

思路探索 根据线性空间定义中“加法”和“数量乘法”满足的八条规则进行证明.

解 $k(\alpha - \beta) + k\beta = k(\alpha - \beta + \beta) = k\alpha$, 所以 $k(\alpha - \beta) = k\alpha - k\beta$.

2. 在 $\mathbf{P}^4$ 中, 设 $\varepsilon_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (2, 1, 3, 1)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_4 = (0, 1, -1, -1)$,

$\xi = (0, 0, 0, 1)$ 求向量 ξ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为_____.

解 构造矩阵 $A = (\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \varepsilon_3^T, \varepsilon_4^T, \xi^T)$, 对 A 施行初等行变换化 A 为简化梯形矩阵.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_1+2r_2 \\ r_3+3r_2 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_{43}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[r_4 \times \frac{1}{2}]{\begin{matrix} r_1+r_3 \\ r_2 \times (-1) \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3+2r_4]{\begin{matrix} r_2-r_4 \\ r_3 \times (-1) \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 \times (-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),
\end{aligned}$$

所以向量 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标是 $(1, 0, -1, 0)$.

3. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是线性变换, 如果 $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E}$, 有 $\mathcal{A}^k\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^k = \underline{\hspace{2cm}}$. ($k > 1$)

解 数学归纳法.

当 $k = 2$ 时,

$$\mathcal{A}^2\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}^2\mathcal{B} - \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A}) + (\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A})\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E} + \mathcal{E}\mathcal{A} = 2\mathcal{A},$$

结论成立.

假设当 $k = m$ 时结论成立, 即有 $\mathcal{A}^m\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^m = m\mathcal{A}^{m-1}$, 则

当 $k = m+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{m+1}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^{m+1} &= \mathcal{A}^{m+1}\mathcal{B} - \mathcal{A}^m\mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{A}^m\mathcal{B}\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{A}^{m+1} \\
&= \mathcal{A}^m(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}) + (\mathcal{A}^m\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^m)\mathcal{A} \\
&= \mathcal{A}^m\mathcal{E} + m\mathcal{A}^{m-1}\mathcal{A} = (m+1)\mathcal{A}^m,
\end{aligned}$$

即 $k = m+1$ 时结论成立, 故对一切 $k > 1$ 结论成立.

4. 已知 P^3 中线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\eta_1 = (-1, 1, 1)$, $\eta_2 = (1, 0, -1)$, $\eta_3 = (0, 1, 1)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 因为

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) X$$

所以 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$B = XAX^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 在 $\mathbf{R}^4$ 中, 设 $\alpha = (1, 1, 1, 2)$, $\beta = (3, 1, -1, 0)$. α, β 之间的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle =$ _____.

(内积按通常定义).

$$\text{解 } \cos \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} = \frac{3}{\sqrt{7} \times \sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{77}}, \text{ 所以 } \langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{3}{\sqrt{77}}.$$

三、解答题

1. 已知向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, 1, -2), \alpha_2 = (2, 3, 1, 0), \alpha_3 = (1, 2, 2, -3), \beta_1 = (1, 1, 1, 1), \beta_2 = (1, 0, 1, -1),$$

$$\beta_3 = (1, 3, 0, -4),$$

设子空间 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), V_2 = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 求 $V_1 + V_2$ 及 $V_1 \cap V_2$ 的维数和基.

解 $V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 只需求出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的一个极大无关组就是 $V_1 + V_2$ 的基, 经计算求得为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ (答案不唯一), 故 $V_1 + V_2$ 的维数等于 4 (全空间). 又经计算可得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 3, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩也为 3, 故 V_1, V_2 的维数都是 3, 因此由维数公式得 $V_1 \cap V_2$ 的维数为 2. 求 $V_1 \cap V_2$ 的基要求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\beta_1 + x_5\beta_2 + x_6\beta_3 = \mathbf{0}.$$

经计算可知 β_1, β_3 , 就是 $V_1 \cap V_2$ 的基 (答案不唯一).

2. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $P^{3 \times 3}$ 中全体与 $\mathbf{A}$ 可交换的矩阵所成子空间的维数和一组基.

解
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} + \mathbf{B}$$

设 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{A}$ 可交换, 则有

$$\mathbf{AX} = (\mathbf{E} + \mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{EX} + \mathbf{BX} = \mathbf{X} + \mathbf{BX}$$

$$\mathbf{XA} = \mathbf{X}(\mathbf{E} + \mathbf{B}) = \mathbf{XE} + \mathbf{XB} = \mathbf{X} + \mathbf{XB}$$

所以 $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} \Leftrightarrow \mathbf{BX} = \mathbf{XB}$, 从而有

$$\mathbf{XB} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_{13} & x_{13} & x_{13} \\ 3x_{23} & x_{23} & x_{23} \\ 3x_{33} & x_{33} & x_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{BX} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3x_{11} + x_{21} + x_{31} & 3x_{12} + x_{22} + x_{32} & 3x_{13} + x_{23} + x_{33} \end{pmatrix},$$

由对应元素相等, 得
$$\begin{cases} x_{13} = x_{23} = 0, \\ 3x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3x_{33} \\ 3x_{12} + x_{22} + x_{32} = x_{33}, \end{cases}$$
 解方程组得一般解为

$$\begin{cases} x_{13} = x_{23} = 0, \\ x_{21} = -3x_{11} - x_{31} + 3x_{33}, \text{ 其中 } x_{11}, x_{12}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \text{ 为自由未知量, 依次取值 } (1, 0, 0, 0, 0), \\ x_{22} = -3x_{12} - x_{32} + x_{33}, \end{cases}$$

$(0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$, 得

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ 是 $C(\mathbf{A})$ 的一个基, 因此, $C(\mathbf{A})$ 的维数是 5.

3. 求复矩阵的若尔当标准形:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 } \lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & - & 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & - & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & \lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^n - 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\lambda^n - 1$ 为其不变因子, 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 1 的 n 次单位根.

因而其若尔当标准形 $J = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_3 & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix}.$

4. 求正交矩阵 $\mathbf{T}$, 使 $\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}$ 成对角形, 其中 $\mathbf{A}$ 为: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

思路探索 利用“ $\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} =$ 对角矩阵”中 $\mathbf{T}$ 的求法解题.

$$\text{解 } |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 (\lambda-10) = 0,$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$.

将 $\lambda = 1$ 代入

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + (\lambda-5)x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + (\lambda-5)x_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

得基础解系为 $\alpha_1 = (-2, 1, 0), \alpha_2 = (2, 0, 1)$,

正交化和单位化后为

$$\beta_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \beta_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}} \right).$$

将 $\lambda = 10$ 代入②, 得基础解系为 $\alpha_3 = (-1, -2, 2)$,

$$\text{单位化后为 } \beta_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

所求正交矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

四、证明题

1. 设 F^n 是数域 F 上 n 维列向量空间, A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $l \times n$ 矩阵. 若 W 是齐次线性方程组 $Bx = 0$ 的解空间 (W 看成是 F^n 的子空间). 定义 φ 为 F^n 到 F^m 的线性映射:

$\varphi(\alpha) = A\alpha$, 证明:

$$\dim \varphi(W) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - r(B).$$

证 将 φ 限制在 W 上,由维数公式可得 $n - r(B) = \dim W = \dim \varphi(W) + \dim \text{Ker } \varphi|_W$.

注意到 $\text{Ker } \varphi|_W = \text{Ker } \varphi \cap W$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的公共解空间,既为线性方程

组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 的解空间,故 $\dim \text{Ker } \varphi|_W = n - r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. 综合上面的式子,即可得到结论.

2. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间, 证明:

$$P^n = V_1 \oplus V_2.$$

证明: 齐次方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 解空间的一组基为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)$,

$\alpha_2 = (-1, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $\alpha_{n-1} = (-1, 0, \cdots, 0, 1)$, 因此 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})$.

齐次方程组 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = x_n, \\ x_2 = x_n, \\ \cdots \\ x_{n-1} = x_n. \end{cases}$$

从而它的解空间的一组基为 $\beta = (1, 1, \cdots, 1)$, 因此 $V_2 = L(\beta)$.

取向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta$, 由于

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n \neq 0,$$

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta$ 线性无关, 因此它是 P^n 的一组基, 于是

$P^n = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta)$. 因为 $V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}) + L(\beta) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1},$

$\beta) = P^n$, 且 $\dim(V_1) + \dim(V_2) = (n-1) + 1 = n = \dim(P^n)$, 所以 $P^n = V_1 \oplus V_2$.

3. 设 V 是一 n 维欧氏空间, $\alpha \neq 0$ 是 V 中一固定向量.

(1) 证明: $V_1 = \{x | (x, \alpha) = 0, x \in V\}$ 是 V 的一子空间.

(2) 证明: V_1 的维数等于 $n-1$.

思路探索 维 $(V_1) = n-1$ 当且仅当 V_1 中向量均可由 $n-1$ 个线性无关的向量线性表出.

证明: (1) $0 \in V_1$, 即 $V_1 \neq \emptyset$. $\forall x_1, x_2 \in V_1, \forall k \in \mathbf{R}$, 有

$$(x_1 + x_2, \alpha) = (x_1, \alpha) + (x_2, \alpha) = 0,$$

$$(kx_1, \alpha) = k(x_1, \alpha) = 0,$$

即 $x_1 + x_2 \in V_1, kx_1 \in V_1$, 故 V_1 是 V 的子空间.

(2) 将 α 扩充为 V 的一组正交基 $\alpha, \eta_2, \dots, \eta_n$, 因为 $(\eta_i, \alpha) = 0, i = 2, 3, \dots, n$, 故 $\eta_i \in V_1 (i = 2, 3, \dots, n)$. $\forall \beta \in V_1$, 设 $\beta = k_1\alpha + k_2\eta_2 + \dots + k_n\eta_n$, 则

$$0 = (\beta, \alpha) = k_1(\alpha, \alpha) + k_2(\eta_2, \alpha) + \dots + k_n(\eta_n, \alpha) = k_1(\alpha, \alpha).$$

由于 $(\alpha, \alpha) \neq 0$, 故 $k_1 = 0$, 即 $\beta = k_2\eta_2 + \dots + k_n\eta_n$, 从而 $\eta_2, \dots, \eta_n$ 是 V_1 的一组基, 基维数为 $n-1$.