

第1讲 行列式

背景简介

大表哥考研QQ交流群 828754818

追忆青葱的中学时光，那些年黑板上曾解开的，或未曾解开的二元一次方程组和三元一次方程组，都已飘散在忘却的或难以忘却的脑海里。在大学不知不觉的流年中，又遇到未知数更多的一次方程，通常称之为线性方程组。我们再重温中学里学过的解二元一次方程组的方法，故事从一个简单的例子开始。

$$\text{求解二元一次方程组} \begin{cases} 3x - y = 1, \\ 4x + 2y = 8. \end{cases} \text{ 用代入消元法，在第一个方程式中解出 } y = 3x - 1.$$

代入第二个方程式中得到 $4x + 2(3x - 1) = 8$ ，整理得 $10x = 10$ ，解得 $x = 1$ ，代入 $y = 3x - 1$

$$\text{求得 } y = 2. \text{ 于是上述线性方程组有唯一解: } \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

读者不难想象这种方法也可用来解一般的线性方程组，比如对一个含 10 个未知数的方程组，利用一个方程式将第一个未知数用其他 9 个未知数表示出来以后分别代入其余方程式，于是原来的方程组就化为只含有 9 个未知数的方程组了。再用同样的方法可以得到一个只含 8 个未知数的方程组，等等。一直做到只含 1 个未知数。解出这个一元一次方程式并返回去求所有其他未知数。这个办法在理论上似乎是可行的，但手工计算时，要耗费大量 A_4 纸，周一算到周日，最后还可能是一个美丽的错误。

当未知数个数增加时（在许多实际问题中，未知数的个数可能成千上万），运算将变得难以想象的复杂。另外，用代入法无法得出一个规范化的公式，这对于理论上分析线性方程组的解不能不说是个很大的缺陷。我们现在希望给出线性方程组解得一个公式。

那么问题来了，这样的公式真的存在吗？我们首先来考察二元一次方程组的解，设有二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

用 a_{22} 乘第一式的两边，用 $-a_{12}$ 乘第二式的两边得：

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -b_2a_{12}, \end{cases}$$

将这两个方程式两边相加得： $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$ 。

$$\text{于是 } x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \text{ 用类似的办法消去 } x_1, \text{ 解得 } x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

注意到两个解都可以表示为分数的形式, 其中分母仅和未知数的系数有关. 二元一次方程组解的公式是有了, 但是这个公式不太好记忆. 于是引入二阶行列式的定义

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 则当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 二元一次线性方程组(1)有唯一解, 其解可

以唯一地表示成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

显而易见, 这种形式的解的公式一目了然, 整齐有序, 易于记忆. 我们自然希望用同样的公式来表示三元一次方程组的解乃至 n 元线性方程组的解.

为了寻找线性方程组解的统一公式, 17 世纪人们开始研究形式最简约的二阶行列式, 以后人们发现对三元一次线性方程组也有完全平行的公式, 当然, 使用的是三阶行列式. 在 18 世纪时, 数学家们热衷于寻找代数方程的求根公式, 而二元、三元一次线性方程组的解用二阶、三阶行列式表示, 恰是这类方程的“求根公式”, 因而得到重视.

经过众多数学家的努力, 又将二阶、三阶行列式推广到 n 阶行列式, 并用它给出了 n 个未知量 n 个方程的线性方程组解的一般公式(克拉默法则). 随着行列式理论的成熟, 人们也发现, 行列式不仅对线性方程组有用, 而且在许多其它领域也是有用的工具, 例如在几何学中它被用来表示空间中一个平行六面体的有向体积等等. 最后数学家们认识到, 行列式其实是描述 n 阶方阵某种特性的一个数(而 n 阶方阵则用来探讨多种事物, 不仅仅拘泥于线性方程组), 从这个维度再次开拓了行列式的应用前景, 也为后面我们学习矩阵理论创造了基本的研究工具.

读者在学习本讲时, 需要理解行列式的定义, 利用展开式定义以及行列式的 8 大性质计算其值. 掌握克拉默法则, 并会应用其结论解线性方程组. 理解并会运用拉普拉斯公式.

内容聚焦

1.1 二阶行列式

具有下列形状的文件组, 称为 n 元一次线性方程组的标准式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a_{ij}, b_i (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 都是常数, $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 是未知数, 方程组中所有未知数都是一次的.

在一般的线性方程组中, m 和 n 可以不相等, 即方程组中未知数个数和方程式个数可以不等. 凡是经过有限次移项、合并同类项可以变为(1)式形状的文件组都称为线性方程组.

求解线性方程组是整个代数学的重要任务之一,我们在这一讲中主要讨论方程式的个数等于未知数的个数时(即 $m=n$), 如何求解上述线性方程组(1).

我们自然希望用某种形式比较漂亮又好记的公式, 来表示三元一次方程组的解乃至 n 元线性方程组的解. 在做这件事之前, 不妨先彻底揭秘二阶行列式, 研究它有哪些性质, 这将启发我们定义更广义的 n 阶行列式.

定义 1 把四个数 a, b, c, d , 排成两行两列, 则称 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 为二阶行列式, 且其值为 $ad - bc$.

定义 2 设 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}$, 称行列式 $|A|$ 为右上三角行列式, 元素 a_{11}, a_{22} 为行列式的主对角元素(有时也简称对角元素).

定义 2' 设 $|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}$, 称行列式 $|B|$ 为左上三角行列式, 元素 a_{12}, a_{21} 为行列式的副对角元素.

右上三角行列式与左上三角行列式也统称为上三角行列式. 相应地, 也可定义下三角行列式(即右下三角行列式与左下三角行列式).

利用上述定义, 我们可得到二阶行列式的如下性质.

性质 1 右上三角行列式的值等于其主对角线元素之积.

性质 2 行列式某行或某列全为零, 则行列式的值为零.

若第一行全为零, 则显然

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

其他几种情形也类似可验证.

性质 3 用常数 c 乘以行列式的某一行或某一列, 得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

比如将 c 乘以行列式的第一行, 我们有

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (ca_{11})a_{22} - (ca_{12})a_{21} = c|A|.$$

其他几种情形也类似可验证.

性质 4 交换行列式不同的两行(列), 行列式的值改变符号.

证明也很容易:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 5 若行列式两行或两列成比例, 则行列式的值等于零. 特别, 若行列式两行

或两列相等, 则行列式的值等于零.

对列成比例的情形我们可证明如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{21} - ka_{11}a_{21} = 0.$$

同理可证明行成比例的情形.

性质 6 若行列式中某行(列)元素均为两项之和, 则行列式可表示为两个行列式之和.

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & a_{12} \\ b_{21} + c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

验证也非常容易, 只需按照行列式定义计算等式两边的值即可. 需要注意的是下面的等式不成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

请读者想一想为什么? 上式左边的行列式应该等于什么?

性质 7 行列式某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上, 行列式的值不变.

比如行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} + ka_{21}) - a_{21}(a_{12} + ka_{11})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理可证

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

设有二阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 我们称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为 $|A|$ 的转置, 记为 $|A'|$ 或 $|A^T|$.

注意 $|A'|$ 的第一列就是 $|A|$ 的第一行, $|A'|$ 的第二列就是 $|A|$ 的第二行. 根据定义

$|A'| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, 显然等于行列式 $|A|$ 的值. 于是又得到行列式的一个性质.

性质 8 行列式和其转置具有相同的值.

注 从性质 1 到性质 7 我们发现行列式性质具有行和列的对称性, 即对行成立的性质, 对列也成立. 这是因为性质 8 在起作用. 转置将行变成了相应的列, 既然行列式转置后值不变, 那么同样的性质对列也成立.

现在我们试着用行列式的性质来解二元一次方程组 (1). 将 b_1, b_2 代入行列式:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad (2)$$

由性质 7, 在 (2) 式中用 $-x_2$ 乘以第二列加到第一列上, 行列式值不变, 即 (2) 等于

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

综上所述

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

故

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

同理可得

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

由此我们收到启发, 既然用二阶行列式可以求解二元一次方程组, 那么只要从性质着手定义出一般的 n 阶行列式, 应该也可以求出 n 元线性方程组的解.

1.2 三阶行列式

我们遵循上一节的思路来定义三阶行列式, 设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1)$$

称 $|A|$ 是一个三阶行列式. 我们要定义三阶行列式, 使得行列式具有上节所述的 8 个性质. 我们不妨倒过来, 假定行列式已经定义且适合 8 个性质, 那么行列式

$|\mathbf{A}|$ 的值应该等于什么?

根据行列式性质 6, 上述行列式 $|\mathbf{A}|$ 可以表示成为 3 个行列式之和:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

对于上述和式中的第二个行列式, 利用性质 4, 将其第二行和第一行对换, 就可将它化为与和式中第一个行列式相同的类型. 同理, 和式中第三个行列式也可以通过行对换化为和第一个行列式相同的类型. 因此, 现在问题是, 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

应该等于什么? 我们利用性质 7 可以将上面这个行列式化为上三角行列式: 将 $-a_{22}^{-1}a_{32}$ 乘以第二行加到第三行上, 由性质 7, 行列式值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - a_{22}^{-1}a_{32}a_{23} \end{vmatrix}.$$

再根据性质 1, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - a_{22}^{-1}a_{32}a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}(a_{33} - a_{22}^{-1}a_{32}a_{23}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

再由性质 4 和上面的结果, 我们得到

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

现在我们引进几个术语. 如果将上述行列式 $|\mathbf{A}|$ 划去某个元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 所在的一行和一列, 则剩下的元素按原来的次序组成一个二阶行列式, 我们称这

个二阶行列式为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} .

令 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

比如 $|A|$ 中元素 a_{11} 的余子式 $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 代数余子式

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; 而元素 a_{12} 的余子式为 $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, 代数余子式

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

根据上面的分析, 关于三阶行列式的值, 我们有理由作出如下的定义.

定义 1 $|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$.

例 1 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

解 根据定义, 行列式值为

$$1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

例 2 计算 $\begin{vmatrix} a & a^2+a+1 & 1 \\ 0 & -a & a-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 由定义得此行列式值为

$$a \times \begin{vmatrix} -a & a-1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} a^2+a+1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} a^2+a+1 & 1 \\ -a & a-1 \end{vmatrix} = a^3 + a - 1.$$

例 3 计算网红行列式 $\begin{vmatrix} \text{我} & 0 & \text{生} \\ 0 & \text{有} & 0 \\ \text{你} & 0 & \text{幸} \end{vmatrix}$.

答案 送给你的 ta

由三阶行列式的定义, 不难证明所有三阶行列式都满足第一节中的 8 条性质. 但我们将这个任务交给读者来完成.

现在我们要用三阶行列式的性质来解三元一次方程组. 设有下列三元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (2)$$

和第一节的做法类似, 我们计算行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

将上述右边行列式的第二列乘以 $-x_2$ 加到第一列上, 再将第三列乘以 $-x_3$ 加到第一列上, 根据行列式性质 7, 得到的行列式的值等于原行列式的值, 即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

再由行列式性质 3, 可将上式右边第一列中的 x_1 提出来, 即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

于是得到 x_1 的解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

同理, 可得

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

可见, 三元一次方程组有着和二元一次方程组类似的公式解. 这里行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为方程组(2)的系数行列式,即未知数的系数组成的行列式.

1.3 n 阶行列式

有了二阶行列式和三阶行列式的概念,定义 n 阶行列式就不困难了.

先介绍 n 阶行列式及其相关概念.称下面用两条竖线围起来的由 n 行 n 列元素组成的式子为一个 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

它由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成,第 i 行上元素全体称为行列式 $|A|$ 的第 i 行,第 j 列上元素全体称为行列式 $|A|$ 的第 j 列.第 i 行第 j 列交点上的元素 a_{ij} 称为行列式 $|A|$ 的第 (i, j) 元素.元素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 称为 $|A|$ 的主对角线,因为如果把行列式看成一个正方形,这些元素恰在正方形的对角线上.

定义 1 定义元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 为由行列式 $|A|$ 中划去第 i 行第 j 列后剩下的 $n-1$ 行与 $n-1$ 列元素组成的行列式:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

我们注意到三阶行列式的值是用二阶行列式来定义的,因此 n 阶行列式的值可以用 $n-1$ 阶行列式来定义.即我们可以用归纳法来定义上述行列式 $|A|$ 的值.

定义 2 当 $n=1$ 时,式(1)的值定义为 $|A| = a_{11}$.现假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义了它们的值,则对任意的 i, j, M_{ij} 的值已经定义,定义 n 阶行列式 $|A|$ 的值为

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \quad (2)$$

对于任一自然数,式(2)给出了计算 n 阶行列式的方法:将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶行列式,再化 $n-1$ 阶行列式为 $n-2$ 阶行列式, $\cdots$,最后便可求出 $|A|$ 的值.

式(2)又称为行列式 $|A|$ 按第一列展开的展开式.

为了使(2)式的形状更简约整齐些,我们引进代数余子式的概念.

定义 3 在行列式 $|A|$ 中, a_{ij} 的代数余子式定义为 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式.

利用代数余子式的定义,式(2)可写成如下形式:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}. \quad (3)$$

注 与前面二阶、三阶行列式的定义是一致的.以二阶行列式为例,设有二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

a_{11} 的余子式 $M_{11} = a_{22}$, a_{21} 的余子式 $M_{21} = a_{12}$,故

$$A_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = a_{22}, A_{21} = (-1)^{2+1}a_{12} = -a_{12}.$$

而 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,与二阶行列式的定义一致.

例 1 设有五阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

分别求 M_{34} , A_{34} 及 M_{41} , A_{41} .

解 $|A|$ 的第(3,4)元素 $a_{34} = 1$,它的余子式为

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

a_{34} 的代数余子式 $A_{34} = (-1)^{3+4}M_{34} = -M_{34}$.

$|A|$ 的第(4,1)元素 $a_{41} = 0$,它的余子式为

$$M_{41} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

a_{41} 的代数余子式 $A_{41} = (-1)^{4+1} M_{41} = -M_{41}$.

例2 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 将行列式按第一列展开, 得到

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \left[\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right] - 4 \cdot (-1)^3 \\ &= \lambda [\lambda(\lambda^2 + \lambda + 2) + 3] + 4 \\ &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4. \end{aligned}$$

n 阶行列式同样适合前二节中二阶行列式和三阶行列式适合的 8 条性质, 因为我们是用归纳法定义的行列式, 自然地, 这些性质的证明也要用归纳法.

性质1 若 $|A|$ 是一个 n 阶行列式, 且

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 或 } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证 我们称上式中左边的行列式为上三角行列式 (这时 $a_{ij} = 0$ 对一切 $i > j$ 成立); 右边的行列式为下三角行列式 (这时 $a_{ij} = 0$ 对一切 $i < j$ 成立).

现在用归纳法分别证明上述结论. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 对上三角行列式, 由定义, 有

$$|A| = a_{11}M_{11}.$$

但 M_{11} 仍是一个上三角行列式, 故由归纳假设 $M_{11} = a_{22} \cdots a_{nn}$ 即知

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

对下三角行列式, 由定义, 有

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \quad (4)$$

对 $M_{i1} (i > 1)$, 它仍是一个下三角行列式且 M_{i1} 主对角线上的元素至少有一个为 0,

故由归纳假设, 对 M_{i1} , 由归纳假设等于 $a_{22} \cdots a_{nn}$, 于是 $|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

性质 2 若 n 阶行列式 $|A|$ 的某一行或某一列的元素全为 0, 则 $|A| = 0$.

证 仍用数学归纳法. 当 $n=1$ 时显然正确. 假定结论对 $n-1$ 阶行列式成立.

先设 $|A|$ 中第 i 行元素全为 0, 则

$$|A| = a_{i1}M_{i1} - a_{i2}M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{in}M_{in},$$

其中每个 $M_{j1} (j \neq i)$ 都有一行元素全为 0, 故由归纳假设 $M_{j1} = 0 (j \neq i)$. 另

外, $a_{i1} = 0$, 故 $a_{i1}M_{i1} = 0$, 从而 $|A| = 0$.

再设 $|A|$ 中第 i 列全为 0. 若 $i=1$, 显然 $|A| = 0$. 若 $i > 1$, 在展开式中每个 M_{j1} 都有一列元素全为 0, 由归纳假定 $M_{j1} = 0$, 故 $|A| = 0$.

性质 3 将行列式 $|A|$ 的某一行或某一列乘以一个常数 c , 则得到的行列式 $|B| = c|A|$.

证 对行列式的阶用数学归纳法. 当 $n=1$ 时显然正确. 假定 $|B|$ 中第 i 行的每个元素等于 $|A|$ 中第 i 行的每个元素乘以 c , 而其他行元素与 $|A|$ 完全相同. 由定义可知,

$$|B| = a_{11}N_{11} - \cdots + (-1)^{i+1}ca_{i1}N_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}, \quad (5)$$

其中 N_{r1} 为 $|B|$ 的第 r 行第一列元素的余子式. 由题意及归纳假设知道

$$N_{r1} = cM_{r1} (r \neq i), N_{i1} = M_{i1},$$

其中 M_{r1} , M_{i1} 均为 $|A|$ 相应的余子式. 由 (5) 式即知 $|B| = c|A|$.

对列的情形也不难证明. 若 $|B|$ 的第一列元素都是 $|A|$ 的第一列元素的 c 倍, 则将 $|B|$ 按定义展开即知. 若 $|B|$ 的第 i ($i > 1$) 列元素是 $|A|$ 的第 i 列元素的 c 倍, 利用展开式及归纳假设即可得到结论.

性质 4 对换行列式 $|A|$ 的任意不同的两行, 则行列式的值改变符号 (绝对值不变).

证 对 n 用归纳法, $n=2$ 时已知成立, 假定结论对 $n-1$ 阶行列式也成立. 对 n 阶行列式 $|A|$, 先证明特殊情形, 即对换行列式的相邻两行, 其值改变符号. 设 $|B|$ 由 $|A|$ 对换第 r 行及第 $r+1$ 行而得. 记 N_{ij} 为 $|B|$ 的第 i 行第 j 列元素的余子式, 将 $|B|$ 按行列式定义展开并注意到 $|B|$ 由 $|A|$ 对换第 r 行及第 $r+1$ 行而得:

$$\begin{aligned} |B| &= a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{r+1}a_{r+1,1}N_{r1} \\ &\quad + (-1)^{r+2}a_{r,1}N_{r+1,1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}. \end{aligned}$$

若 $i \neq r, r+1$, 则由归纳假定 $N_{i1} = -M_{i1}$, 而 $N_{r1} = M_{r+1,1}$, $N_{r+1,1} = M_{r1}$, 由此即知 $|B| = -|A|$.

现来考虑一般情形. 要将 $|A|$ 的两行对换, 不妨设所换两行为第 i 行及第 j 行, 且 $j > i$. 我们可先将第 i 行与第 $i+1$ 行对换, 再与第 $i+2$ 行对换, 一直到与第 j 行对换. 然后再将第 $j-1$ 行经过不断与相邻行的对换换到原来第 i 行的位置. 这样一共换了 $2(j-i)-1$ 次, 因此仍有 $|B| = -|A|$.

性质 5 若行列式 $|A|$ 的两行成比例, 则 $|A| = 0$. 特别, 若行列式的两行相同, 则行列式的值等于零.

证 先证明特殊情形. 设行列式 $|A|$ 有两行相同, 将这两行对换, 则由性质 4 可得 $|A| = -|A|$, 因此 $|A| = 0$.

再证明一般情形. 设 $|A|$ 有两行成比例, 则由性质 3, 将比例因子提出后得到的行列式有两行相同, 值等于零, 故 $|A| = 0$.

性质6 设 $|A|, |B|, |C|$ 是3个 n 阶行列式, 它们的第 (i, j) 元素分别记为 a_{ij}

b_{ij}, c_{ij} , $|A|, |B|, |C|$ 的第 r 行元素适合条件:

$$c_{rj} = a_{rj} + b_{rj} (j=1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

而其他元素相同, 即 $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij} (i \neq r, j=1, 2, \dots, n)$, 则

$$|C| = |A| + |B|.$$

证 对 n 用归纳法, 当 $n=1$ 时结论显然成立. 设结论对 $n-1$ 阶行列式成立.

将 $|C|$ 按定义展开:

$$|C| = a_{11}Q_{11} - a_{21}Q_{21} + \dots + (-1)^{r+1}(a_{r1} + b_{r1})Q_{r1} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1}, \quad (7)$$

其中 Q_{ij} 为 $|C|$ 的余子式. 若 $i \neq r$, 则 Q_{i1} 仍适合(6)式, 由归纳假设得

$$Q_{i1} = M_{i1} + N_{i1},$$

这里 M_{i1}, N_{i1} 分别是 $|A|, |B|$ 的余子式. 若 $i=r$, 则

$$Q_{r1} = M_{r1} = N_{r1}.$$

因此(7)式为

$$\begin{aligned} |C| &= a_{11}(M_{11} + N_{11}) - a_{21}(M_{21} + N_{21}) + \dots + (-1)^{r+1}(a_{r1}M_{r1} + b_{r1}N_{r1}) + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}(M_{n1} + N_{n1}) \\ &= (a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) + (a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}) \\ &= |A| + |B|. \end{aligned}$$

性质6可用行列式具体表示如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} + b_{r1} & a_{r2} + b_{r2} & \cdots & a_{rn} + b_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

性质 7 将行列式的一行乘以某个常数 c 加到另一行上, 行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ca_{i1} & a_{j2} + ca_{i2} & \cdots & a_{jn} + ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由性质 6 可将上式左边分拆成两个行列式之和, 一个等于右边的行列式, 另一个由性质 5 知其值应为零.

上面我们对行证明了性质 4 至性质 7. 实际上这些性质对列也成立.

性质 5' 若行列式 $|A|$ 的两列成比例, 则 $|A| = 0$. 特别地, 若行列式的两列相同, 则行列式的值等于零.

证 先证明若 $|A|$ 有两列相同, 则值等于零. 假设 $|A|$ 中相同的两列都不是第一列, 则将 $|A|$ 展开并用归纳法即可得 $|A| = 0$. 因此我们不妨设 $|A|$ 的第一列与第 r 列相同. 这时如果第一列元素全为 0, 则 $|A| = 0$. 故假设 $|A|$ 的第一列元素至少有一个不等于零, 比如 $a_{s1} \neq 0$. 将 $|A|$ 的第一行与第 s 行对换, 仅改变行列式的符号, 由于 $-|A| = 0$ 即意味着 $|A| = 0$, 因此我们不妨设 $a_{11} \neq 0$, 这时 $|A|$ 的形状为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & a_{21} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots \end{vmatrix}.$$

将 $|A|$ 的第一行乘以 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 加到第 i 行上去 ($i = 2, 3, \dots, n$), 则得到一个新的行列式 $|C|$, 它的形状为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots \\ 0 & * & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & * & 0 & * \end{vmatrix}.$$

由性质 7 知 $|C| = |A|$, 将 $|C|$ 按定义展开, $|C| = a_{11}Q_{11}$. 而 Q_{11} 是一个有一列全为 0 的 $n-1$ 阶行列式, 故 $Q_{11} = 0$, 即有 $|C| = 0$, 于是 $|A| = 0$.

一般情形的证明和行性质的证明相同.

性质 6' 设 $|A|, |B|, |C|$ 是 3 个 n 阶行列式, $|C|$ 的第 r 列元素等于 $|A|$ 的第 r 列元素与 $|B|$ 的第 r 列元素之和:

$$c_{ir} = a_{ir} + b_{ir} (i = 1, 2, \dots, n),$$

而其他元素相同, 即 $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, n, j \neq r)$, 则

$$|C| = |A| + |B|.$$

证 若 $r = 1$, 用行列式定义展开 $|C|$ 即可得到结论. 若 $r > 1$, 将 $|C|$ 展开:

$$|C| = a_{11}Q_{11} - a_{21}Q_{21} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1}.$$

每个 Q_{i1} 由假设归纳得

$$Q_{i1} = M_{i1} + N_{i1},$$

其中 Q_{i1}, M_{i1}, N_{i1} 分别是 $|C|, |A|, |B|$ 的余子式. 代入可得

$$|C| = |A| + |B|.$$

性质 7' 将行列式的一列乘以某个常数 c 加到另一列上, 行列式的值不变.

证 类似性质 7 的证明, 利用性质 6' 及性质 5' 即可证明.

性质 4' 交换行列式的两列, 行列式的值改变符号.

证 设 $|B|$ 由 $|A|$ 交换第 r 列及第 s 列得到, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

作行列式 $|C|$, 它的第 r 列及第 s 列相同, 都等于 $|A|$ 的第 r 列及第 s 列之和, 则

$$\begin{aligned}
|C| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} + a_{1s} & \cdots & a_{1r} + a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} + a_{2s} & \cdots & a_{2r} + a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} + a_{ns} & \cdots & a_{nr} + a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} + a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} + a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} + a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r} + a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2r} + a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr} + a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= |A| + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad + |B| + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

除 $|A|$, $|B|$ 外的两个行列式各自都有两列相同, 因此值为0. 而 $|C|$ 也有两列相同, 值也等于0. 于是 $|B| = -|A|$.

行列式的第8个性质我们将在下一节证明.

第4节 行列式的展开和转置

行列式的定义通常称为行列式按第一列展开的行列式, 那么行列式是否也可以按其他列展开呢?

我们可以这样考虑(仍用上一节中的行列式 $|A|$): 先交换第 r 列与第 $r-1$ 列, 再交换第 $r-1$ 列与第 $r-2$ 列, 等等, 经过 $r-1$ 次这样的交换便可将 $|A|$ 的第 r 列换到第一列, 再按定义展开行列式. 记 $|B|$ 是经过这样变换以后的行列式, 则

$$(-1)^{r-1}|A| = |B| = a_{1r}N_{11} - a_{2r}N_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nr}N_{n1}$$

$$= a_{1r}M_{1r} - a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nr}M_{nr},$$

因此

$$|A| = (-1)^{1+r}a_{1r}M_{1r} + (-1)^{2+r}a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{n+r}a_{nr}M_{nr}, \quad (1.4.1)$$

上面 N_{ir} , M_{ir} 分别表示 $|B|$ 及 $|A|$ 的余子式. 利用代数余子式可将上式改写为

$$|A| = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}, \quad (1.4.2)$$

其中 $A_{ir} = (-1)^{i+r}M_{ir}$ 是 $|A|$ 的代数余子式.

定理 1 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, 第 i 行第 j 行元素 a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij} , 则对任意的 $r (r=1, 2, \dots, n)$ 有展开式:

$$|A| = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}. \quad (1.4.3)$$

又对任意的 $s \neq r$, 有

$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0. \quad (1.4.4)$$

证 只需证明后一结论. 注意下面的行列式, 由于其第 r 列与第 s 列相同, 其值应为零:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

将这个行列式按第 s 列展开便有

$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0.$$

定理 1 告诉我们行列式可以按任一列展开, 那么是否也可以按任一行展开呢? 我们先通过一个特例看看能否按第一行展开.

例 1 证明

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,s-1} & a_{2s} & a_{2,s+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,s-1} & a_{ns} & a_{n,s+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1s}A_{1s}.$$

证 由定理 1 将上述行列式按第 s 列展开, 得

$$|A| = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \cdots + a_{ns}A_{ns}.$$

除了 A_{1s} 外, $A_{is} (i > 1)$ 中都有一行等于零, 因此 $A_{is} = 0$. 此即 $|A| = a_{1s}A_{1s}$.

引理 1 若

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.4.5)$$

则

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

证 由行列式的性质 6 及例 2 的结论得:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \end{aligned}$$

定理 2 设 $|A|$ 是如 (1.4.5) 式所示的行列式, 则对任意的 $r (r=1, 2, \dots, n)$ 有展开式:

$$|A| = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \cdots + a_{rn}A_{rn}. \quad (1.4.6)$$

又对任意的 $s \neq r$, 有

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \cdots + a_{rn}A_{sn} = 0. \quad (1.4.7)$$

证 由引理 1 以及性质 4, 采用与定理 1 的证明类似的方法即得.

例 2 已知 5 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

计算 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} + A_{45}$

$$\text{解法一 } A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} + A_{45} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

解法二 由 $2A_{41} + 2A_{42} + 2A_{43} + A_{44} + A_{45} = 0$ 及 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2A_{44} + 2A_{45} = 27$

可得, $A_{44} + A_{45} = 18$, 则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} + A_{45} = 9$

定义1 设 $|A|$ 是如(1.4.5)式所示的行列式, 令

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $|A'|$ 的第一行为 $|A|$ 的第一列, $|A'|$ 的第二行为 $|A|$ 的第二列, $\dots$ $|A'|$ 的第 n 行为 $|A|$ 的第 n 列, 则 $|A'|$ 称是 $|A|$ 的转置(也经常记作 $|A^T|$). 换言之, $|A'|$ 可由 $|A|$ 将行变成列、列变成行得到.

我们现在来证明行列式的性质8.

性质8 行列式转置后的值不变, 即 $|A'| = |A|$.

证 对行列式的阶用数学归纳法. 当 $n=1$ 时显然成立. 设 M_{ij} 及 N_{ij} 分别是 $|A|$ 及 $|A'|$ 的余子式, 则 N_{ij} 等于 M_{ji} 的转置. 由归纳假设, $N_{ij} = M_{ji}$. 将 $|A'|$ 按第一行展开:

$$\begin{aligned} |A'| &= a_{11}N_{11} - a_{21}N_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{1n} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \\ &= |A|. \end{aligned}$$

例3 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解法一 记 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n \times n}$, 将按第一行展开得到

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 \\ & & & & -1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$= 2D_{n-1} + 2(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2.$$

于是

$$D_n = 2D_{n-1} + 2 = 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2$$

$$= \cdots = 2^{n-1} D_1 + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2$$

$$= 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 = 2^{n+1} - 2.$$

解法二 对行列式作如下变换:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2+1 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2+1 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & \frac{2^2+2+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 2 & & & & & 2 \\ & 2 & & & & 2+1 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 2 & & \frac{2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1}{2^{n-3}} \\ & & & & 2 & \frac{2^{n-1}+\cdots+2+1}{2^{n-2}} \\ & & & & & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2^{n-1} \cdot \frac{2^{n-1} + \cdots + 2 + 1}{2^{n-2}} = 2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 2^{n+1} - 2.$$

注 法一中求得 $D_n = 2D_{n-1} + 2$ 后, 也可以利用待定系数法及递推法求:

令 $D_n + a = 2(D_{n-1} + a)$, 则 $2D_{n-1} + a = D_n = 2D_{n-1} + 2$, 从而 $a = 2$, 即

$D_n + a = 2(D_{n-1} + 2)$. 递推得到 $D_n + 2 = 2^{n-1}(D_1 + 2) = 2^{n+1}$, 故 $D_n = 2^{n+1} - 2$.

现在我们的任务是利用行列式性质, 求出 n 元线性方程组的公式解. 设有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1.4.8)$$

记方程组的系数行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

用 $-x_2$ 乘以右边行列式的第二列加到第一列上, 再用 $-x_3$ 乘以第三列加到第一列上, $\cdots$, 最后将 $-x_n$ 乘以第 n 列加到第一列上, 由行列式性质知道行列式值不变, 即

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

于是

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

同理, 通过计算

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

可得

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

不断做下去,得

$$x_n = \frac{|A_n|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

上述结论通常称为克拉默(Gramer)法则,我们把它写成如下定理.

定理 3 (克拉默法则) 设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

记这个方程组的系数行列式为 $|A|$,若 $|A| \neq 0$,则方程组有且仅有一组解:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}, \quad (1.4.10)$$

其中 $|A_j|$ ($j=1,2,\cdots,n$)是一个 n 阶行列式,它由 $|A|$ 去掉第 j 列换上方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 组成的列而成.

证 前面的讨论说明,如果线性方程组(1.4.9)有解,那么解一定是(1.4.10)的形式,因此我们只要验证(1.4.10)确实是线性方程组(1.4.9)的解即可.

将 $|A_j|$ 按第 j 列展开,得

$$|A_j| = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj},$$

从而

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}), j = 1, 2, \cdots, n.$$

因此对任意的 $1 \leq i \leq n$, 由定理 2 可得

$$\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\ &= \frac{a_{i1}}{|A|} (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}) + \cdots + \frac{a_{in}}{|A|} (b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn}) \\ &= \frac{b_1}{|A|} (a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{21} + \cdots + a_{in}A_{n1}) + \cdots + \frac{b_n}{|A|} (a_{i1}A_{1n} + a_{i2}A_{2n} + \cdots + a_{in}A_{nn}) \\ &= \frac{b_1}{|A|} \cdot 0 + \cdots + \frac{b_i}{|A|} \cdot |A| + \cdots + \frac{b_n}{|A|} \cdot 0 = b_i, \end{aligned}$$

即 (1.4.10) 是线性方程组 (1.4.9) 的解.

例 4 求一个二次多项式 $f(x)$, 使得 $f(1)=0, f(2)=3, f(-3)=28$.

解 不妨设所求二次多项式为 $f(x)=ax^2+bx+c$, 由已知条件 $f(1)=0, f(2)=3, f(-3)=28$, 得方程组

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=3, \\ 9a-3b+c=28. \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -20, & |A_1| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 28 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -40, \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 9 & 28 & 1 \end{vmatrix} = 60, & |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & -3 & 28 \end{vmatrix} = -20. \end{aligned}$$

由克拉默法则求得 $a=2, b=-3, c=1$, 于是所求二次多项式为 $f(x)=2x^2-3x+1$.

注 当系数行列式 $|A|=0$ 时, 方程组的解比较复杂, 我们将在后面详细讨论.

1.5 行列式的计算

我们已经看到, 线性方程组可以用行列式求解. 但是当未知数个数很多时, 行列式的阶将很大, 用行列式的定义来计算高阶行列式是非常麻烦的. 有没有好的办法使得行列式的计算简单一些? 这是本节要研究的问题.

我们先来看下面一个例子.

例 1 设有行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $|A|$ 的第一列除了第一个元素外都等于零, 则 $|A| = a_{11}M_{11}$.

注意 M_{11} 是一个 $n-1$ 阶行列式. 这个命题启发我们, 如果能设法把一个行列式变成上例中行列式的形状, 那么我们就可以将这个行列式“降阶处理”. 不断地重复这个过程, 就可以将高阶行列式的值计算出来. 如何做到这一点? 我们来看下面这个例子.

例2 计算下列行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-4-8) = 12. \end{aligned}$$

例3 计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

解 将第二行乘以-3加到第三行上去再按定义展开:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -14 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -14 & 10 \end{vmatrix} \\ &= -2(-20+56) = -72. \end{aligned}$$

例4 计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & -3 & 0 \\ 3 & 11 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

解 这时若消去第一列将出现分数运算. 因此我们采用消去第三列的方法:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & -3 & 0 \\ 3 & 11 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 2 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & -5 \\ 23 & 15 & 0 & -15 \\ 10 & 14 & 0 & -1 \\ -20 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 23 & 15 & -15 \\ 10 & 14 & -1 \\ -20 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 15 & 0 \\ 10 & 14 & 13 \\ -20 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+3} \cdot 13 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 15 \\ -20 & -1 \end{vmatrix} = -13(-23+300) = -3601. \end{aligned}$$

如果一个行列式中某一行或某一列有公因子, 则可根据性质 3 可以将它提出来, 这样往往能简化计算.

例 5 计算行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 先将第一行中的公因子提出:

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

再计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -9 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -8 \\ -9 & -18 \end{vmatrix} = 54,$$

因此, $|A| = 3 \times 54 = 162$.

从上面几个简单的例子我们可以得到, 计算行列式的基本原则是尽可能多地使行列式的元素变为零, 尽可能快地将行列式降阶处理.

下面举几个文字行列式的例子.

例 6 计算 n 阶 Vander Monde (范德蒙) 行列式:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解 我们采用行消去法. 将第 $n-1$ 列乘以 $-x_n$ 后加到第 n 列上, 再将第 $n-2$ 列乘以 $-x_n$ 加到第 $n-1$ 列上. 这样一直做下去, 直至将第一列乘以 $-x_n$ 加到第二列上为止. 每次这样变形后行列式的值不改变, 于是

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_1 x_n & \cdots & x_1^{n-2} - x_1^{n-3} x_n & x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n \\ 1 & x_2 - x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \cdots & x_2^{n-2} - x_2^{n-3} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-2} - x_{n-1}^{n-3} x_n & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \cdots & x_1^{n-3}(x_1 - x_n) & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_2^{n-3}(x_2 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1} - x_n) & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix}.$$

将上式中各行公因子提出后得到的 $n-1$ 阶行列式恰好是一个 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ 的 $n-1$ 阶 Vander Monde 行列式, 我们记之为 V_{n-1} . 于是

$$V_n = (-1)^{n+1} (x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}.$$

于是

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

这里 $\prod$ 表示连乘积, i, j 在保持 $i < j$ 的条件下遍历 1 到 n . 例如,

$$V_4 = (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1),$$

$$V_5 = (x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)V_4.$$

例7 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \end{vmatrix}$.

解 $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \end{vmatrix}$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

例1.5.8 求下列行列式的值:

$$F_n = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}.$$

解 按第一行展开并注意到以下两点: 一是 a_n 的余子式是一个上三角行列式, 故其值等于 $(-1)^{n-1}$; 二是 λ 的余子式是与 F_n 相类似的 $n-1$ 阶行列式, 我们记之为 F_{n-1} , 于是

$$F_n = \lambda F_{n-1} + (-1)^{1+n} (-1)^{n-1} a_n = \lambda F_{n-1} + a_n.$$

利用递推关系不难求得

$$F_n = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_n.$$

例9 求证:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

证 注意到行列式 $|\mathbf{A}|$ 的每个元素都是两个数之和, 根据行列式的性质6, 可依次将第一列、第二列、第三列分拆开, 得到行列式 $|\mathbf{A}|$ 是8个行列式之和. 注意到其中6个行列式都有两列成比例, 从而值为零, 最后可得

$$|A| = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

例 10 计算下列 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 将第二行、第三行直至第 n 行都加到第一行上, $|A|$ 的值不变:

$$|A| = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

再将第一行乘以 $-a$ 分别加到第二行、第三行, 直至第 n 行上, 得

$$|A| = (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

例 11 计算

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

解 将第二列、第三列和第四列都加到第一列上, $|A|$ 的值不变:

$$|A| = \begin{vmatrix} x+y+z+w & y & z & w \\ x+y+z+w & x & w & z \\ x+y+z+w & w & x & y \\ x+y+z+w & z & y & x \end{vmatrix} = (x+y+z+w) \begin{vmatrix} 1 & y & z & w \\ 1 & x & w & z \\ 1 & w & x & y \\ 1 & z & y & x \end{vmatrix}.$$

再将第一行乘以-1分别加到第二行、第三行和第四行上,得

$$|A| = (x+y+z+w) \begin{vmatrix} 1 & y & z & w \\ 0 & x-y & w-z & z-w \\ 0 & w-y & x-z & y-w \\ 0 & z-y & y-z & x-w \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z+w) \begin{vmatrix} x-y & w-z & z-w \\ w-y & x-z & y-w \\ z-y & y-z & x-w \end{vmatrix}.$$

再将第二列分别加到第一列和第三列上,得

$$|A| = (x+y+z+w) \begin{vmatrix} x+w-y-z & w-z & 0 \\ x+w-y-z & x-z & x+y-z-w \\ 0 & y-z & x+y-z-w \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z+w)(x+y-z-w)(x+w-y-z) \begin{vmatrix} 1 & w-z & 0 \\ 1 & x-z & 1 \\ 0 & y-z & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z+w)(x+y-z-w)(x+z-y-w)(x+w-y-z).$$

一般说来,文字行列式的计算往往需要较高的技巧.但在实际问题中人们大量遇到的是数字行列式,这类行列式现在已可借助计算机进行计算,但是懂得行列式的计算原理及行列式的性质对正确应用计算机计算行列式是有益的.

1.6 行列式的等价定义

设有行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.6.1)$$

我们已经知道如何用归纳法求它的值,但是读者也许仍觉得不满意.能否将 $|A|$ 的值直接表示出来呢?我们可以这样考虑:利用行列式性质,将 $|A|$ 分拆成若干个简单的行列式之和,然后设法将这些简单的行列式计算出来再求和.

为了得到具体的想法,我们先来看三阶行列式的情形.设

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

根据行列式性质 6, 将 $|\mathbf{A}|$ 的第一列分拆开, 则可以表示成为 3 个行列式之和:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

继续将上述第一个行列式 (其余类似) 的第二列和第三列分别拆开, 则可得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

进一步, 由行列式性质 3, 将上述 9 个行列式每一列的公因子分别提出, 则有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{12}a_{13} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{12}a_{23} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{12}a_{33} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ a_{11}a_{22}a_{13} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{22}a_{23} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ a_{11}a_{32}a_{13} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{32}a_{23} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{32}a_{33} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

此时, 所有的三阶行列式都具有十分简单的形式, 即行列式的每一列只有一个元素为 1, 其余元素全为 0. 注意到: 如果有两个 1 处于同一行, 则由行列式性质 5, 此行列式的值为零; 如果所有的 1 处于不同的行, 则通过列之间的对换可将此行列式变为所有的 1 都在主对角线上的行列式, 由行列式性质 4 知此行列式的值等于 1 或 -1. 因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

最后可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

我们尝试着把上述讨论推广到 n 阶行列式. 为了叙述方便, 先做一些约定.

行列式第 j 列简记为 $\alpha_j (j=1, 2, \dots, n)$. $|A|$ 写为 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n|$. 用 e_1 表示由 n 个数组成的列, 其中第一个数为 1, 其余为零, 即

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

为了防止混淆, 我们把这一列数用括号括起来. 类似地定义 e_i 为由 n 个数组成的列, 其第 i 行为 1, 其余元素均为 0.

定义一个数 a 与 e_i 的乘积仍为一个由 n 个数组成的列, 其第 i 行元素为 a , 其余为零. 定义 $ae_i + be_j$ 为这样的由 n 个数组成的列, 其第 i 行为 a , 第 j 行为 b , 其余为零, 如果 $i=j$, 则第 i 行为 $a+b$, 其余行为零. 这样, 行列式 $|A|$ 的第一列可写为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n = \sum_{i=1}^n a_{i1}e_i.$$

同样, 第 j 列写为 $\alpha_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$. 利用行列式的性质有

$$|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = \left| \sum_{i=1}^n a_{i1}e_i, \alpha_2, \dots, \alpha_n \right| = \sum_{i=1}^n a_{i1} |e_i, \alpha_2, \dots, \alpha_n|.$$

对行列式 $|e_i, \alpha_2, \dots, \alpha_n|$, 由 $\alpha_2 = \sum_{k=1}^n a_{k2}e_k$ 得 $|e_i, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = \sum_{k=1}^n a_{k2} |e_i, e_k, \dots, \alpha_n|$. 于是

$$|A| = \sum_{i,k} a_{i1} a_{k2} |e_i, e_k, \dots, e_n|.$$

不断做下去即可得 $|A| = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n} |e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}|$. 注意 $|e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}|$, 当 $e_{k_i} = e_{k_j}$ 时其值为零。因此不为零的行列式 $|e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}|$ 必须适合条件: $k_i \neq k_j$ 即 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是数 $1, 2, \dots, n$ 的一个全排列或称 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个置换. 这时候, 行列式 $|e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}|$ 是一个每一行和每列都有且只有一个元素等于 1, 其余元素都为零的行列式, 显然, 经过若干次行或列的对换, 这样的行列式可以化为下列形状:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

上面行列式的值等于 1, 因此行列式 $|e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}|$ 的值等于 1 或 -1. 故 $|A|$ 的展开式共有 $n!$ 项, 每一项的值为 $(-1)^\varepsilon a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n}$, 其中 ε 只与排列 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 有关.

为了决定行列式中每一项的符号, 我们引进逆序数的概念.

定义 1 我们称 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 的排列 $(1, 2, \dots, n)$ 为常序排列, 即数字从小到大的排列为常序排列. 如果在一个排列中 j 排在 i 之前但是 $j > i$, 则称这是一个逆序对, 一个排列的所有逆序对的总个数称为这个排列的逆序数.

逆序数的求法是: 设排列为 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, 先看 k_1 后面有多少个数小于 k_1 , 不妨设为 m_1 ; 再看 k_2 后面有多少个数小于 k_2 , 不妨设为 m_2 ; $\dots$; 最后看 k_{n-1} 后面有多少个数小于 k_{n-1} , 不妨设为 m_{n-1} . 由定义, 排列 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 的逆序数就等于 $m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$, 通常记为 $N(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 或 $\tau(k_1, k_2, \dots, k_n)$. 例如, 常序排列 $(1, 2, \dots, n)$ 的逆序数为零.

定义 2 若排列 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 的逆序数是一个偶数 (包括零), 则称之为偶排列; 若 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 的逆序数是一个奇数, 则称之为奇排列.

设 S_n 为 $1, 2, \dots, n$ 的所有全排列构成的集合, 则 S_n 的元素个数为 $n!$.

引理 1 设 $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n$, 若将其中 k_i 与 k_j 的位置对换, 其余数不动, 则排

列的奇偶性改变. 即奇排列变为偶排列, 偶排列变为奇排列.

证 首先我们考虑相邻两个数的对换. 若是 $k_i > k_{i+1}$, 则对换后逆序数减少了1; 若 $k_i < k_{i+1}$, 则对换后逆序数增加了1, 无论哪种情形, 奇偶性都改变了. 再考虑一般情形. k_i 与 k_j 的对换可通过相邻两个数的对换来实现: 不妨设 $i < j$, 将 k_i 与 k_{i+1} 对换, 再与 k_{i+2} 对换, $\cdots$, 最后与 k_j 对换 (共换了 $j-i$ 次); 再将 k_j 与 k_{j-1} 对换, 再与 k_{j-2} 对换, $\cdots$, 最后与 k_{i+1} 对换 (共换了 $j-i-1$ 次); 此时 k_j 到了 k_i 原来的位置, k_i 到了原来 k_j 的位置, 这样一共换了 $2(j-i)-1$ 次, 因此改变了奇偶性.

引理 2 设 $n \geq 2$, 则 S_n 中的奇排列与偶排列各占一半.

证 设 S_n 中的奇排列有 p 个, 偶排列有 q 个. 由于 $n \geq 2$, 故可将每个奇排列的头两个数对换一下, 则所有的奇排列变成了互不相同的偶排列, 因此 $p \leq q$. 同理可证 $q \leq p$, 故 $p = q$.

逆序数的实际意义是, 它给出了任一排列与常序排列之间相互转换的关系.

引理 3 设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S_n$, 则通过 $N(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 次相邻对换, 可将 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 变为常序排列 $(1, 2, \cdots, n)$.

证 对 n 进行归纳: $n=1$ 时结论显然成立, 设对 $1, 2, \cdots, n-1$ 的任一排列结论成立, 设 n 在排列 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的第 i 位置, 即 $k_i = n$, 其逆序数为 m_i (这时 $m_i = n-i$). 将 k_i 与 k_{i+1} 对换, 再与 k_{i+2} 对换, $\cdots$, 最后与 k_n 对换 (共换了 m_i 次), 此时 n 就到了最末一位. 注意到

$$N(k_1, k_2, \cdots, k_n) = m_i + N(k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_n),$$

且 $(k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_n) \in S_{n-1}$. 由归纳假设知 $(k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_n)$ 经过 $N(k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_n)$ 次相邻对换可变为常序排列 $(1, 2, \cdots, n-1)$, 因此由上面的讨论知 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 经过 $N(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 次相邻对换可变为常序排列 $(1, 2, \cdots, n)$.

定理 1 设 $|A|$ 是如 (1.6.1) 式所示的 n 阶行列式, 则

$$|A| = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}. \quad (1.6.2)$$

例1 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -2 & 3 \\ 1 & 2x+3 & 4 \\ -2 & -1 & 3x+1 \end{vmatrix}$, 求 x^2 项 x^3 的系数.

解 按照行列式的定义, $f(x)$ 的每一项均来自不同行不同列元素的乘积的形式, 而 x^2 项 x^3 项均来自 $(-1)^{N(123)}(x+2)(2x+3)(3x+1)$, 故 x^2 的系数为 23, x^3 的系数为 6.

注 我们也可以将上式作为行列式值的定义, 从而推出行列式的诸性质. 事实上, 有不少教科书就是采用这种方法来定义行列式的. 读者不妨自己作一尝试.

1.7 拉普拉斯定理(Laplace)

我们已经知道, 行列式可以按任一列或任一行展开. 现在我们要将这个结论作进一步推广, 首先引进 k 阶子式的概念.

定义1 设 $|A|$ 是一个 n 阶行列式, $k < n$. 又 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 及 $j_1, j_2, \dots, j_k$ 是两组自然数且适合条件:

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n; \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n.$$

取行列式 $|A|$ 中的第 i_1 行, 第 i_2 行, $\dots$, 第 i_k 行以及第 j_1 列, 第 j_2 列, $\dots$, 第 j_k 列交点上的元素, 按原来 $|A|$ 中的相对位置构成一个 k 阶行列式. 我们称之为 $|A|$ 的一个 k 阶子式, 记为

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \quad (1.7.1)$$

把这个子式写出来就是:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

在行列式 $|A|$ 中去掉第 i_1 行, 第 i_2 行, $\dots$, 第 i_k 行以及第 j_1 列, 第 j_2 列, $\dots$, 第 j_k 列后剩下的元素按原来的相对位置构成一个 $n-k$ 阶行列式. 这个行列式称为子式 (1.7.1) 的余子式, 记为

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \quad (1.7.2)$$

若令 $p = i_1 + i_2 + \cdots + i_k$, $q = j_1 + j_2 + \cdots + j_k$, 记

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{p+q} \mathbf{M} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}, \quad (1.7.3)$$

称之为子式 (1.7.1) 的代数余子式.

定理 (Laplace 定理) 设 $|\mathbf{A}|$ 是一个 n 阶行列式, 在 $|\mathbf{A}|$ 中任取 k 行 (列), 那么含于这 k 行 (列) 的全部 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于 $|\mathbf{A}|$. 即若取定 k 个行: $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$, 则

$$|\mathbf{A}| = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \leq n} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \quad (1.7.4)$$

同样若取定 k 个列: $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \leq n$, 则

$$|\mathbf{A}| = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \quad (1.7.5)$$

例 1 计算行列式

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 因为第一、第三含有较多的零, 因此在这两列上作 Laplace 展开, 得

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-3) \times (-11) + (-3) \times 32 + 3 \times (-23) = -132.$$

例 2 设 n 阶行列式前 k 行和后 $n-k$ 列的交点上的元素都是零, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

计算其值.

解 由 Laplace 定理 (按前 k 行展开) 立即得到

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解惑释疑

问题 1 行列式与行列式的值有什么区别?

答 这是一个“形式”与“内涵”的问题. 以二阶行列式为例, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 叫做二阶行列式, 它表示一个数 $ad-bc$, 这个数称为二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的值, 并记作

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

注意上式中的等号是“记作”的意思, 但由于等号通常理解为左右两边的数相等, 因此上式左边行列式的记号也就表示行列式的值.

两个行列式相等是指它们的值相等, 如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 并不一定能推出 $a=1, b=2, c=3, d=4$.

由于行列式的记号既然表示行列式本身也表示它的值, 所以, 通常我们可以把“行列式”和“行列式的值”理解为同一个对象, 并没有本质区别.

问题 2 余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij} 有什么特点? 它们之间有什么联系?

答 因第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij} , 都是行列式中划去了第 i 行第 j 列 (显然也划去了 a_{ij} 本身) 后计算而得, 故它们仅与位置 (i, j) 有关, 与 (i, j) 元的取值无关.

由定义, 它们之间的关系为 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

问题 3 克拉默法则在使用时需要注意什么?

答 ①适用范围：有 n 个未知量， n 个方程，即未知量的个数=方程的个数！

② $|A| \neq 0$ ③解存在 ④解唯一 ⑤多用于证明！

问题4 如何准确记住范德蒙行列式的值？

答 形式上，范德蒙行列式的第一列(行)都是 1，每行是一个等比数列的形式；由于范德蒙行列式 $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ ，连乘号中涉及到了“双指标”的变动，可以先固定其中一个，让另一个依次取完！比如，

先固定 $i=1$ ，则 $j=2, 3, \dots, n$ ，此时对应的乘积为 $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)$ ；

再固定 $i=2$ ，则 $j=3, \dots, n$ ，此时对应的乘积为 $(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2)$ ；……

最后当 $i=n-1$ 时，只能取 $j=n$ ，此时对应的乘积为 $(x_n - x_{n-1})$ ；因此

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

问题5 如何理解第6定理1行列式的等价定义？

答 n 阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于所有取自不同行不同列 n 个

元素的乘积 $a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$ 的代数和，即 $|A| = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$

等价地，也可换成读者可能更习惯的写法 $|A| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$

此定义中应注意几点：

(1) 和式记号 $\sum$ 是对指标集 $\{(j_1 j_2 \cdots j_n) | (j_1 j_2 \cdots j_n) \text{ 是 } (12 \cdots n) \text{ 的排列}\}$ 求和，因 n 个不同元素的排列数是 $n!$ ，于是该求和式展开之后，共有 $n!$ 项相加。

(2) 和式中的每项都是取自 $|A|$ 中不同行不同列的元素之积。由排列知识知， $|A|$ 中这样不同行、不同列的 n 个元素之积共有 $n!$ 个。

(3) 和式中每一项都带有符号 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ ，即根据此排列的逆序数 $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为偶数或奇数，每项依次取正或负号，根据排列的性质，和式中共有 $\frac{n!}{2}$ 项取“+”与取“-”。

综上所述可知， n 阶行列式 $|A|$ 恰好是它的不同行、不同列的 n 个元素的代数和，是一个“乘积求和式”，其中一半带有正号，一半带有负号。

习题精练

1 设 A, B, C 是 n 阶矩阵， $a_i, b_i, c_i, d_i (i=1, 2)$ 是常数，则下列各式正确的是 ()。

$$(A) \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \quad (B) \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = -|A||B|$$

$$(C) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A|^2 - |B|^2 \quad (D) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$2 \text{ 求 } D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$3 \text{ 计算行列式 } \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

4 计算以下9级排列的逆序数, 从而判断它们的奇偶性:

(1) 134782695 (2) 217986354; (3) 987654321;

5 选择*i*与*k*使

(1) 1274*i*56*k*9 成偶排列; (2) *i*125*k*4897 成奇排列;

6 写出把排列12345变成排列25341的对换过程.

7 决定排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数, 讨论它的奇偶性.

8 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为*k*, 排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?

9 在6级行列式的展开式中, $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}, a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项带什么符号?

10 求下列 $n+1$ 阶行列式的值($a_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

11 若*n*阶行列式 $|A|$ 中零元素的个数超过 $n^2 - n$ 个, 证明: 这个行列式的值等于零.

12 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 x 是未知数, a_{ij} 是常数. 证明: $f(x)$ 是一个最高次项系数为1的 n 次多项式, 且其 $n-1$ 次项的系数等于 $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$.

13 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

14 求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

15 设行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

求证: $A_n = a_0 a_1 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)$.

16 计算下列行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

17 由行列式定义计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.

18 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}.$$

19 求平面上的三条直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0 (i=1, 2, 3)$ 相交于一个点的条件.

20 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ (2-\lambda)x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 求 λ 的值.

习题解析

1. 应选 (D).

选项(A)错误. 违反了行列式单行(列)的拆分性.

$$\text{如取 } \begin{vmatrix} 1+2 & 1+2 \\ 1+3 & 1+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

选项(B)错误. 事实上, $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{n \cdot n} |A| |B|$. 更一般地, 设 X, Y 分别是 m, n 阶矩

阵, Z 是任意的 $m \times n$ 的矩阵, 则 $\begin{vmatrix} O & X \\ Y & Z \end{vmatrix} = (-1)^{m \cdot n} |X| |Y|$.

选项(C)错误. 请读者验证 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 时(C)错误.

2. 160

3. 对换行列式的一四行, 再对换二四列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2.$$

注 也可直接按行或者列展开.

4. $\tau(134782695) = 10$, 所以134782695是一个偶排列.

(2) $\tau(217986354) = 18$, 所以 217986354 是一个偶排列.

(3) $\tau(987654321) = 36$, 所以 987654321 是一个偶排列.

5. (1) $i = 8, k = 3$; (2) $i = 3, k = 6$.

6. $(12345)^{(1,2)}(21435)^{(1,5)}(25431)^{(4,3)}(25341)$.

7. $\tau(n(n-1)\cdots 1) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1)$.

下面讨论 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 的奇偶性.

① 当 $n = 2k$ 为偶数时

$\frac{1}{2}n(n-1) = k(2k-1)$, 其中 $2k-1$ 为奇数. 因此 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 奇偶与 k 一致.

$k = 2l$, 即 $n = 4l$ 时, $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为偶数.

$k = 2l+1$, 即 $n = 4l+2$ 时, $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为奇数.

② 当 $n = 2k+1$ 为奇数时

$\frac{1}{2}n(n-1) = k(2k+1)$, 其中 $2k+1$ 为奇数, 因此 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 奇偶与 k 一致.

$k = 2l$, 即 $n = 4l+1$ 时, $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为偶数.

$k = 2l+1$, 即 $n = 4l+3$ 时, $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为奇数.

根据以上讨论, 得到下述结论:

$\begin{cases} \text{当 } n = 4l, n = 4l+1 \text{ 时, 排列 } n(n-1)\dots 21 \text{ 是偶排列;} \\ \text{当 } n = 4l+2, n = 4l+3 \text{ 时, 排列 } n(n-1)\dots 21 \text{ 是奇排列.} \end{cases}$

8. $\frac{1}{2}n(n-1) - k$.

9. $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 带正号, $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 带正号.

10.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n a_i^{-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (a_1 a_2 \cdots a_n) (a_0 - \sum_{i=1}^n a_i^{-1}).$$

11. 由行列式的组合定义可得

$$|\mathbf{A}| = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}.$$

由于 $|\mathbf{A}|$ 中零元素的个数超过 $n^2 - n$ 个, 故 $a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$ 中至少有一个为零, 从而 $a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} = 0$, 因此 $|\mathbf{A}| = 0$. 如直接利用行列式的性质, 也可以这样来证明: 因为 $|\mathbf{A}|$ 中零元素超过 $n^2 - n$ 个, 由抽屉原理知 $|\mathbf{A}|$ 至少有一列其零元素的个数大于等于 $\lceil \frac{n^2 - n}{n} \rceil + 1 = n$, 即 $|\mathbf{A}|$ 至少有一列其元素全为零, 因此 $|\mathbf{A}| = 0$.

12. 由行列式的组合定义知, $f(x)$ 的最高次项出现在组合定义展开式中的单项 $(x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$ 中, 且展开式中的其它单项作为 x 的多项式其次数小于等于 $n - 2$. 因此 $f(x)$ 是一个最高次项系数为1的 n 次多项式, 且其 $n - 1$ 次项的系数等于 $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$.

13. 将所有行加到第一行提出公因子 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 再消去第一行化为 $n - 1$ 阶行列式:

$$|\mathbf{A}| = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & 2-n & \cdots & -2 & -1 \\ n & 1-n & 2-n & \cdots & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 \\ 1 & 2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2-n & \cdots & -2 & -1 \\ 1-n & 2-n & \cdots & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

将得到的行列式最后一行乘以 -1 依次加到前面 $n - 2$ 行上去, 得到

$$\begin{vmatrix} n & n & \cdots & n & 0 \\ n & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-n & 2-n & \cdots & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} n^{n-2}.$$

由此得到 $|\mathbf{A}| = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n^{n-1}$.

14. 将所有行加到第一行上, 再按第一行展开得 $D_n = -a_1 D_{n-1} + 1$. 不难得到

$$D_n = 1 - a_1 + a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3 + \cdots + (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n.$$

15. 用数学归纳法. $n=1, 2$ 时结论显然正确, 假定结论在小于 n 时正确. 将 A_n 按第 n 列展开, 得:

$$A_n = (a_{n-1} + a_n) A_{n-1} - a_{n-1} \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$\text{即 } A_n = (a_{n-1} + a_n) A_{n-1} - a_{n-1}^2 A_{n-2}.$$

将归纳假设代入上面的式子就可得到结论.

16. 注意这个行列式和范德蒙行列式的区别在于它们的最后一列. 先添加上一行一列使之成为范德蒙行列式, 再求出 y^{n-1} 的系数即可解出答案:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix},$$

则

$$|B| = (y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

因此 y^{n-1} 的系数是

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

而 $|B|$ 中元素 y^{n-1} 的代数余子式为 $(-1)^{n+1+n} |A| = -|A|$, 因此

$$|A| = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

17. 由行列式定义, $f(x)$ 是这个行列式中所有取自不同行、不同列的元素之积的代数和 (记为 D), 它是关于 x 的至多 4 次的多项式. 因行列式中每个元素至多是 x 的一次多项式, 于是

σ 是 D 中的 x^4 项

$\Leftrightarrow \sigma$ 含有 4 个取自不同行、不同列的 x 的一次多项式的元素

$\Leftrightarrow \sigma$ 是 D 的 $(1,1)$ 、 $(2,2)$ 、 $(3,3)$ 、 $(4,4)$ 元之积 $\Leftrightarrow \sigma = 2x^4$;

σ 是 D 中的 x^3 项

$\Leftrightarrow \sigma$ 含有 3 个取自不同行、不同列的 x 的一次多项式的元素, 而余下一行、一列的元素 (已唯一确定) 是常数

$\Leftrightarrow \sigma$ 是 D 的 $(1,2)$ 、 $(2,1)$ 、 $(3,3)$ 、 $(4,4)$ 元之积 $\Leftrightarrow \sigma = -x^3$;

即 x^4 与 x^3 的系数分别为 2, -1.

18.

解

$$D = \text{adf} \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & d \\ b & c & -e \end{vmatrix} = abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

19. 三条直线相交于一点, 即方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

有唯一解, 而从另一角度考查, 形式上可以把 $(x, y, 1)$ 看成三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = 0 \end{cases}$$

的一组非零解, 而齐次线性方程组有非零解当且仅当它的系数行列式等于零. 由此可得平面

上三条直线相交于一点的充要条件为: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

20. 因为齐次线性方程组有非零解, 故其系数行列式必为零, 即

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ = (3-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-6] = -(3-\lambda)(4-\lambda)(1+\lambda) = 0$$

因此所求 λ 为 3 或 4 或 -1.