

# 关于积分中“不可积”问题探究

提到积分，首先要明确不定积分是用来求原函数，定积分是用来求无穷项加和，莱布尼兹公式把它们神奇的联系起来。

从高等数学里面，我们学习到被积函数只要连续，其必定存在原函数。但是为什么会出出现“不可积”的问题呢？

首先我们来看几个“不可积”积分的例子。

1.三角积分类： $\int \frac{\sin x}{x^n} dx, \int \frac{\cos x}{x^n} dx, \int \frac{\tan x}{x^n} dx, \int x^n \tan x dx$

$$\int \left(\frac{x}{\sin x}\right)^n dx, \int \left(\frac{x}{\cos x}\right)^n dx, \int \left(\frac{x}{\tan x}\right)^n dx,$$
$$\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \tan x^2 dx (\text{菲涅尔积分类型})$$

$$\int \cos(x \sin x) dx (\text{贝塞尔积分}), \int \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx (\text{拉普拉斯积分})$$

2.高斯积分类： $\int e^{ax^2+bx+c} dx, \int x^n e^{ax^2+bx+c} dx$

3.指数积分类型： $\int \frac{e^{ax}}{x} dx, \int \frac{e^{ax}}{a+x^n} dx, \int \frac{x^n}{1 \pm e^x} dx$ . 其中  $E_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$

4.对数积分类型： $\int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\ln x dx}{1+x^n}, \int \ln \sin x dx, \int \ln \cos x dx, \int \ln \tan x dx$ . 其中  $Li_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$

$$\int \ln(a+b \sin x) dx, \int \ln(a+b \cos x) dx, \int \ln(a+b \tan x) dx$$

$$\int \ln \ln \sin x dx, \int \ln \ln \cos x dx, \int \ln \ln \tan x dx,$$

5.椭圆积分类： $\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx, \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx, \int \frac{1}{\sqrt{1 \pm x^n}} dx, \int \sqrt{1 \pm x^n} dx (n \geq 3)$

它们“不可积”主要是因为它们的原函数不能表示成初等函数的形式，现阶段只能表示成级数的形式。现在就出现一个问题，到底它们能不能积分呢？答案是确定的，由于一些特殊函数以及复数的出现，使得基本所有的积分都成为了可能。下面列举了几个“不可积”积分的积分算法。

第一个例子是一个指数积分

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{e^x+1} dx &\xrightarrow{t=e^x} \int \frac{\ln t dt}{t(t+1)} = \int \frac{\ln t}{t} dt - \int \frac{\ln t}{t+1} dx = \frac{1}{2} \ln^2 t - \int \ln t d \ln(t+1) \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 t - \ln t \ln(t+1) + \int \frac{\ln(1+t)}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 t - \ln t \ln(t+1) + \int \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^{k-1}}{k} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 t - \ln t \ln(t+1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 t - \ln t \ln(t+1) - Li_2(-t) \\ &= \frac{x^2}{2} - x \ln(1+e^x) - Li_2(-e^x) + C \end{aligned}$$

第二个例子是一个欧拉积分

$$\int \ln \sin x dx = x \ln \sin x - \int x \frac{\cos x}{\sin x} dx = x \ln \sin x - \int x \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} dx$$

$$= x \ln \sin x - \int ix \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} dx$$

$$\int ix \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} dx = i \int x \left(1 + \frac{2e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}\right) dx = \frac{i}{2} x^2 + 2i \int \frac{x}{e^{2ix} - 1} dx$$

$$= \frac{i}{2} x^2 - \frac{i}{2} [Li_2(e^{2ix}) + 2x^2 + 2ix \ln(1 - e^{2ix})]$$

$$= -\frac{i}{2} Li_2(e^{2ix}) - \frac{i}{2} x^2 + x \ln(1 - e^{2ix})$$

$$\int \ln \sin x dx = x \ln \sin x - \int x \cot x dx = x \ln \sin x + \frac{i}{2} [Li_2(e^{2ix}) + x^2] - x \ln(1 - e^{2ix}) + C$$

$$\text{特别的, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

第三个例子狄拉克雷积分

$$\int \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = -\int \sin^2 x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin^2 x}{x} + \int \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x} + \int \frac{\sin 2x}{2x} d2x = -\frac{\sin^2 x}{x} + Si(2x) + C$$

$$\text{其中 } Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\text{特别的 } Si(+\infty) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

第四个例子是高斯积分

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int e^{-(\sqrt{ax})^2} d(\sqrt{ax}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{ax})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{ax}) + C$$

$$\text{其中 } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx, \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

$$\text{特别的当 } a=1, \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\infty) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

从上面例子看出, 虽然这些积分“不可积”, 但我们依旧可以通过一般的方法将它们表示出来, 显然这样也就出现了许多特殊函数。

从这个角度来看, 基本所有的连续函数都是可积的, 都可以通过初等或者特殊函数来表示。

说了这么多特殊函数, 下面来介绍几个简单的特殊函数。

几个简单的特殊函数

1. Beta 函数  $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ , (其中a, b 都 > 0)

2. Gamma 函数  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$ , (其中  $a > 0$ )

3. 误差函数  $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$

4. zeta 函数  $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$

5. 狄拉克雷eta函数  $\eta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s)$

6. 多重对数函数 (Polylog)  $Li_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}$

其他还有一些像椭圆函数，超几何分布函数，贝塞尔函数这里不做介绍了。

最后留几个问题

1.  $\int_0^1 \ln \ln \frac{1}{x} dx$

2.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \ln \tan x dx$

3.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$

4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 dx$

5.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x \ln \sin x \ln \cos x dx$

问题的解答:

$$1. \int_0^1 \ln \ln \frac{1}{x} dx \xrightarrow{t=\ln \frac{1}{x}} \int_0^\infty \ln t * e^{-t} dt = \Gamma'(1) = -C$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \ln \tan x dx \xrightarrow{t=\ln \tan x} \int_0^\infty \frac{\ln t * e^{2t}}{e^{2t} + 1} dt = \int_0^\infty \frac{\ln t}{e^t + e^{-t}} dt$$

$$\text{Let } I = \int_0^\infty \frac{x^a}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^\infty \frac{x^a * e^{-x}}{1 + e^{-2x}} dx = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty (-1)^k e^{-(2k+1)x} x^a dx$$

$$\xrightarrow{t=(2k+1)x} \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-1)^k e^{-t} t^{a+1-1}}{(2k+1)^{a+1}} dt = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(a+1)}{(2k+1)^{a+1}}$$

$$I' = \int_0^\infty \frac{x^a \ln x}{e^x + e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^\infty [\Gamma'(a+1) * \frac{1}{(2k+1)^{a+1}} - \frac{\Gamma(a+1) \ln(2k+1)}{(2k+1)^{a+1}}]$$

$$I'(0) = \int_0^\infty \frac{\ln x}{e^x + e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^\infty [\Gamma'(1) * \frac{1}{2k+1} - \frac{\Gamma(1) \ln(2k+1)}{2k+1}]$$

$$\text{其中 } \sum_{k=0}^\infty [\Gamma'(1) * \frac{1}{2k+1}] = -\frac{\pi}{4} C, \sum_{k=0}^\infty [(-1)^k \frac{\Gamma(1) \ln(2k+1)}{2k+1}] = \frac{\pi}{4} \ln\left(\frac{\pi}{\Gamma^4(\frac{3}{4})}\right) - \frac{\pi}{4} C$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \ln \tan x dx = \frac{\pi}{4} \ln\left(\frac{\Gamma^4(\frac{3}{4})}{\pi}\right)$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$$

我们知道卡特兰常数G有一个定义

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx \quad (\text{a})$$

$$\text{令 } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx \xrightarrow{x=2t} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt$$

$$= 2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + \frac{\pi}{4} \ln 2 \right]$$

$$= 2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx \right) + \frac{\pi}{2} \ln 2 = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$\text{得到 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (\text{b})$$

$$\text{结合 a, b 得到 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \ln 2 + C \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx = \frac{1}{2} \left( -\frac{\pi}{2} \ln 2 + C \right)$$

$$\begin{aligned}
4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{\sin^2 x} dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d \cot x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} d \sin x = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx \\
&= \pi \ln 2
\end{aligned}$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln \sin x \ln \cos x \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ln \sin x \ln \cos x \sin x \cos x dx$$

$$\text{得到} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln \sin x \ln \cos x \sin x \cos x dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \ln \cos x \sin x \cos x dx$$

$$\text{令} a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \ln \cos x \sin x \cos x dx$$

$$\text{我们知道: } B(a, b) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2a-1} (\cos x)^{2b-1} dx$$

$$\begin{aligned}
\text{则有} \frac{\partial^2 B}{\partial a \partial b} &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2a-1} (\cos x)^{2b-1} \ln \sin x \ln \cos x dx \\
&= B(a, b) \{ [(\psi(a) - \psi(a+b))(\psi(b) - \psi(a+b))] - \psi_1(a+b) \}
\end{aligned}$$

$$\text{带入} a=1, b=1 \text{ 得到} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln \sin x \ln \cos x \sin x \cos x dx = \frac{\pi}{4} * \frac{1}{8} \frac{\partial^2 B}{\partial a \partial b}(1, 1)$$

$$= \frac{\pi}{32} [(\psi(1) - \psi(2))^2 - \psi_1(2)] = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi^3}{192}$$

$$\text{其中} \psi(s+1) - \psi(s) = \frac{1}{s}, \psi_1(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = \zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Written by Rolle  
2014.12.8