

# 北大版《高等代数》 全册定理汇总

微信公众号：微云学姐



微信搜一搜

微云学姐

微云学姐是一位数学专业博主，在公众号和 B 站更新数学专业&考研&读研干货，包括但不限于考研经验、考研规划、网课测评、院校分析、书单分享、资料分享、数学科普。期待你的关注，祝金榜题名！

B 站/公众号/小红书：微云学姐  
数学专业表白墙：1561576248 (QQ)

## 第一章 多项式

**【带余除法】** 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ ，其中 $g(x) \neq 0$ ，一定有 $P[x]$ 中的多项式 $q(x)$ ， $r(x)$ 存在，使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

成立，其中 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 或者 $r(x) = 0$ ，并且这样的 $q(x)$ 与 $r(x)$ 是唯一决定的.带余除法中所得的 $q(x)$ 通常称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式， $r(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式，简称商及余.

**【定理1】** 对于数域 $P$ 上的任意两个多项式 $f(x)$ ， $g(x)$ ，其中 $g(x) \neq 0$ ， $g(x)|f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

**【引理】** 如果有等式 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 成立，那么 $f(x)$ ， $g(x)$ 和 $g(x)$ ， $r(x)$ 有相同的公因式.

**【定理2】** 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ ， $g(x)$ ，在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$ ，且 $d(x)$ 可以表成 $f(x)$ ， $g(x)$ 的一个组合，即有 $P[x]$ 中多项式 $u(x)$ ， $v(x)$ 使 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ .

**【定理3】**  $P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ ， $g(x)$ 互素的充分必要条件是存在 $P[x]$ 中的多项式 $u(x)$ ， $v(x)$ 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ .

**【定理4】** 如果 $(f(x), g(x)) = 1$ ，且 $f(x)|g(x)h(x)$ ，那么 $f(x)|h(x)$ .

**【推论】** 如果 $f_1(x)|g(x)$ ， $f_2(x)|g(x)$ ，且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$ ，那么 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$ .

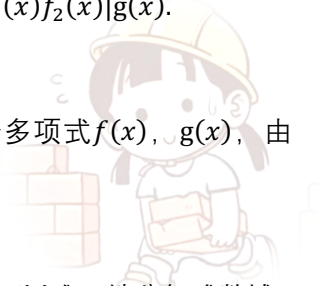
**【定理5】** 如果 $p(x)$ 是一个不可约多项式，那么对于任意的两个多项式 $f(x)$ ， $g(x)$ ，由 $p(x)|f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x)|f(x)$ 或者 $p(x)|g(x)$ .

**【因式分解及唯一性定理】** 数域 $P$ 上每一个次数 $\geq 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 $P$ 上一些不可约多项式的乘积.所谓唯一性是说，如果有两个分解式

$$f(x) = p_1(x)p_2(x) \dots p_s(x) = q_1(x)q_2(x) \dots q_t(x),$$

B站/公众号/小红书：微云学姐

数学专业表白墙：1561576248 (QQ)



那么必有  $s = t$ ，并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x) = c_i q_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

其中  $c_i (i = 1, 2, \dots, s)$  是一些非零常数.

**【定理6】** 如果不可约多项式  $p(x)$  是  $f(x)$  的  $k$  重因式 ( $k \geq 1$ )，那么它是微商  $f'(x)$  的  $k - 1$  重因式.

**【推论1】** 如果不可约多项式  $p(x)$  是  $f(x)$  的  $k$  重因式 ( $k \geq 1$ )，那么  $p(x)$  是  $f(x)$ ， $f'(x)$ ， $\dots$ ， $f^{(k-1)}(x)$  的因式，但不是  $f^{(k)}(x)$  的因式.

**【推论2】** 不可约多项式  $p(x)$  是  $f(x)$  的重因式的充分必要条件为  $p(x)$  是  $f(x)$  与  $f'(x)$  的公因式.

**【推论3】** 多项式  $f(x)$  没有重因式的充分必要条件是  $f(x)$  与  $f'(x)$  互素.

**【定理7】 (余数定理)** 用一次多项式  $x - \alpha$  去除多项式  $f(x)$ ，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值  $f(\alpha)$ . 如果  $f(x)$  在  $x = \alpha$  时的函数值  $f(\alpha) = 0$ ，那么  $\alpha$  就称为  $f(x)$  的一个根或零点.

**【推论】**  $\alpha$  是  $f(x)$  的根的充分必要条件是  $(x - \alpha) | f(x)$ .

**【定理8】**  $P[x]$  中  $n$  次多项式 ( $n \geq 0$ ) 在数域  $P$  中的根不可能多于  $n$  个，重根按重数计算.

**【定理9】** 如果多项式  $f(x)$ ， $g(x)$  的次数都不超过  $n$ ，而它们对  $n + 1$  个不同的数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  有相同的值，即  $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ，那么  $f(x) = g(x)$ .

**【代数基本定理】** 每个次数  $\geq 1$  的复系数多项式在复数域中有一根.

**【复系数多项式因式分解定理】** 每个次数  $\geq 1$  的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

**【实系数多项式因式分解定理】** 每个次数  $\geq 1$  的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解



成一次因式和二次不可约因式的乘积.

**【定理10】（高斯引理）** 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

**【定理11】** 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积, 那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

**【推论】** 设 $f(x)$ ,  $g(x)$ 是整系数多项式, 且 $g(x)$ 是本原的. 如果 $f(x) = g(x)h(x)$ , 其中 $h(x)$ 是有理系数多项式, 那么 $h(x)$ 一定是整系数的.

**【定理12】** 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ 是一个整系数多项式, 而 $\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根, 其中 $r, s$ 互素, 那么必有 $s|a_n, r|a_0$ . 特别地, 如果 $f(x)$ 的首项系数 $a_n = 1$ , 那么 $f(x)$ 的有理根都是整根, 而且是 $a_0$ 的因子.

**【定理13】（艾森斯坦（Eisenstein）判别法）** 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

是一个整系数多项式, 如果有一个素数 $p$ , 使得

- 1)  $p \nmid a_n$ ;
- 2)  $p | a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ ;
- 3)  $p^2 \nmid a_0$

那么 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

**【定理14】** 当 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0, g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ 时, 乘积 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的首项等于 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的首项与 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的首项的乘积.

**【推论1】** 如果 $f_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ , 那么 $f_1 f_2 \dots f_m$ 的首项等于每个 $f_i$ 的首项的乘积.

**【推论2】** 如果 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0, g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ , 那么 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ .



**【定理15】** 对于任意一个 $n$ 元对称多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 都有一个 $n$ 元多项式 $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 使得 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ .

微  
云  
学  
姐



## 第二章 行列式

**【定理 1】** 对换改变排列的奇偶性.

**【推论】** 在全部 $n$ 阶排列中, 奇、偶排列的个数相等, 各有 $n!/2$ 个.

**【定理 2】** 任意一个 $n$ 级排列与排列 $12 \cdots n$ 都可以经过一系列对换互变, 并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

**【定理 3】** 设

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$A_{ij}$ 表示元素 $a_{ij}$ 的代数余子式, 则下列公式成立:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} d, & k = i, \\ 0, & k \neq i; \end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} = \begin{cases} d, & l = j, \\ 0, & l \neq j. \end{cases}$$

用连加号简写为

$$\sum_{s=1}^n a_{ks}A_{is} = \begin{cases} d, & k = i, \\ 0, & k \neq i; \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^n a_{sl}A_{sj} = \begin{cases} d, & l = j, \\ 0, & l \neq j. \end{cases}$$

**【定理 4】** (克拉默法则) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的行列式，即系数行列式

$$d = |A| \neq 0,$$

那么该线性方程组有解，并且解是唯一的，解可以通过系数表为

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \dots, x_n = \frac{d_n}{d},$$

其中 $d_j$ 是把矩阵 $A$ 中第 $j$ 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 所成的行列式，即

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1} b_1 a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2,j-1} b_2 a_{2,j+1} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,j-1} b_n a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, j = 1, 2, \dots, n.$$

**【定理 5】** 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵的行列式 $|A| \neq 0$ ，那么它只有零解.换句话说，如果该方程组有非零解，那么必有 $|A| = 0$ .

**【引理】** 行列式 $D$ 的任一个子式 $M$ 与它的代数余子式 $A$ 的乘积中的每一项都是行列式 $D$ 的展开式中的一项，而且符号也一致.

**【定理 6】(拉普拉斯定理)** 设在行列式 $D$ 中任意取定了 $k(1 \leq k \leq n - 1)$ 个行.由这 $k$ 行元素所组成的一切 $k$ 阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 $D$ .

**【定理 7】** 两个 $n$ 级行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

和



$$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于一个 $n$ 级行列式

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $c_{ij}$ 是 $D_1$ 的第 $i$ 行元素分别与 $D_2$ 的第 $j$ 列的对应元素乘积之和，即

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

**【性质 1】** 行列互换，行列式不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**【性质 2】**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这就是说，一行的公因子可以提出去，或者说以一数乘行列式的一行就相当于用这个数乘此行列式。

**【性质 3】**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这就是说，如果某一行是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式的对应的行一样。

**【性质 4】** 如果行列式中有两行相同，那么行列式为零。

**【性质 5】** 如果行列式中两行成比例，那么行列式为零.

**【性质 6】** 把一行的倍数加到另一行，行列式不变.

**【性质 7】** 对换行列式中两行的位置，行列式反号.

**【性质 8】** 任意一个矩阵经过一系列初等行变换总能变成阶梯形矩阵.

**【性质 9】** 在行列式中，一行的元素与另一方相应元素的代数余子式的乘积之和为零.

**【性质 10】** 对任意的 $n(n \geq 2)$ ， $n$ 阶范德蒙德行列式等于 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 这 $n$ 个数的所有可能的差 $a_i - a_j(1 \leq i < j \leq n)$ 的乘积.范德蒙德行列式为零的充分必要条件是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 这 $n$ 个数中至少有两个相等.

微  
云  
学  
姐



### 第三章 线性方程组

**【定理】** 初等变换总是把方程组变成同解的方程组(第二种初等变换).

**【定理 1】** 在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

中, 如果  $s < n$ , 那么它必有非零解.

**【定理 2】** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  是两个向量组. 如果

- 1) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可以经  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出;
- 2)  $r > s$ .

那么向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  必线性相关.

**【推论 1】** 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可以经向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出, 且  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 那么  $r \leq s$ .

**【推论 2】** 任意  $n + 1$  个  $n$  维向量必线性相关.

**【推论 3】** 两个线性无关的等价的向量组, 必含有相同个数的向量.

**【定理 3】** 一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量.

**【定理 4】**  $A$  的秩 =  $A$  的列秩 =  $A$  的行秩.

**【推论 1】** 矩阵的初等列变换和初等行变换皆不改变该矩阵的秩、列秩和行秩.



**【推论 2】** 矩阵  $A$  的秩等于  $A$  在初等行变换下的阶梯形矩阵中非零行的数目.

**【推论 3】** 设矩阵  $A$  在初等行变换下的阶梯形是

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1i_1} & \cdots & b_{1i_2} & \cdots & b_{1i_r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{2i_2} & \cdots & b_{2i_r} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{ri_r} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则  $A$  的第  $i_1, i_2, \dots, i_r$  列组成它的列向量组的一个极大线性无关组.

**【推论 4】** 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则  $A$  的列向量组(行向量组)线性相关的充分必要条件是  $|A|=0$ ;  $A$  的列向量组(行向量组)线性无关的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ .

**【定理 5】** 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是它的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式  $|A|=0$ ; 方程组只有零解的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ .



**【定理 6】** (克拉默法则及其逆定理) 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

有唯一解的充分必要条件是它的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式 $|A| \neq 0$ .

**【定理 7】（线性方程组有解判别定理）** 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

有解的充分必要条件为它的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

与增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

有相同的秩.

**【定理 8】** 在齐次线性方程组有非零解的情况下，它有基础解系，并且基础解系所含解的个数等于 $n - r$ ，这里 $r$ 表示系数矩阵的秩(以下将看到， $n - r$ 也就是自由未知量的个数).

**【定理 9】** 如果 $\gamma_0$ 是方程组



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

的一个特解，那么方程组的任一个解 $\boldsymbol{\gamma}$ 都可以表成

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\eta},$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 是导出组的一个解，因此，对于方程组的任一个特解 $\boldsymbol{\gamma}_0$ ，当 $\boldsymbol{\eta}$ 取遍它的导出组的全部解时， $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\eta}$ 就给出方程组的全部解。

**【推论】** 在方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

有解的条件下，解是唯一的充分必要条件是它的导出组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

只有零解。

**【引理】** 设

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

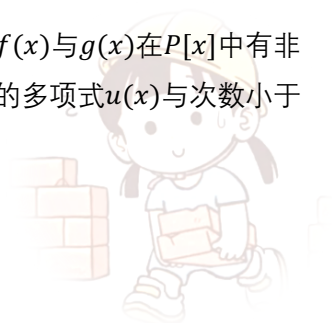
$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$$

是数域 $P$ 上的两个非零的多项式，它们的系数 $a_0, b_0$ 不全为零。于是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $P[x]$ 中有非常数的公因式的充分必要条件是，在 $P[x]$ 中存在非零的次数小于 $m$ 的多项式 $u(x)$ 与次数小于 $n$ 的多项式 $v(x)$ ，使

$$u(x)f(x) = v(x)g(x).$$

**【定理 10】** 设

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$



$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$$

是 $P[x]$ 中两个多项式,  $m, n > 0$ , 于是它们的结式 $R(f, g) = 0$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $P[x]$ 中有非常数的公因式或者它们的第一个系数 $a_0, b_0$ 全为零.

**【定理 11】** 如果 $(x_0, y_0)$ 是方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

的一个复数解, 那么 $y_0$ 就是 $R_x(f, g)$ 的一个根; 反过来, 如果 $y_0$ 是 $R_x(f, g)$ 的一个复根, 那么 $a_0(y_0) = b_0(y_0) = 0$ , 或者存在一个复数 $x_0$ 使 $(x_0, y_0)$ 是方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

的一个解.

微  
云  
学  
姐



## 第四章 矩阵

**【定理1】** 设 $A, B$ 是数域 $P$ 上的两个 $n \times n$ 矩阵, 那么

$$|AB| = |A| |B|$$

即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积.

**【推论1】** 设 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 都是数域 $P$ 上的 $n \times n$ 矩阵, 于是

$$|A_1 A_2 \cdots A_m| = |A_1| |A_2| \cdots |A_m|.$$

**【推论2】** 设 $A, B$ 是数域 $P$ 上 $n \times n$ 矩阵, 矩阵 $AB$ 为退化的充分必要条件是 $A, B$ 中至少有一个是退化的.

**【定理2】** 设 $A$ 是数域 $P$ 上 $n \times m$ 矩阵,  $B$ 是数域 $P$ 上 $n \times s$ 矩阵, 于是

$$\text{秩}(AB) \leq \min[\text{秩}(A), \text{秩}(B)],$$

即乘积的秩不超过各因子的秩.

**【推论】** 如果 $A = A_1 A_2 \cdots A_t$ , 那么

$$\text{秩}(A) \leq \min_{1 \leq j \leq t} \text{秩}(A_j).$$

**【定理3】** 矩阵 $A$ 是可逆的充分必要条件是 $A$ 非退化, 而

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^* \quad (d = |A| \neq 0).$$

**【推论】** 如果矩阵 $A, B$ 可逆, 那么 $A^T$ 与 $AB$ 也可逆, 且

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

**【定理4】**  $A$ 是一个 $s \times n$ 矩阵, 如果 $P$ 是 $s \times s$ 可逆矩阵,  $Q$ 是 $n \times n$ 可逆矩阵, 那么

$$\text{秩}(A) = \text{秩}(PA) = \text{秩}(AQ).$$



**【引理】** 对一个  $s \times n$  矩阵  $A$  作一初等行变换就相当于在  $A$  的左边乘相应的  $s \times s$  初等矩阵，对  $A$  作一初等列变换就相当于在  $A$  的右边乘相应的  $n \times n$  初等矩阵。

**【定理5】** 任意一个  $s \times n$  矩阵  $A$  都与一形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵等价，它称为矩阵  $A$  的标准形，主对角线上 1 的个数等于  $A$  的秩（1 的个数可以是零）。

**【定理6】**  $n$  阶矩阵  $A$  可逆的充分必要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积：

$$A = Q_1 Q_2 \cdots Q_m.$$

由此即得

**【推论1】** 两个  $s \times n$  矩阵  $A, B$  等价的充分必要条件为，存在可逆的  $s$  阶矩阵  $P$  与可逆的  $n$  阶矩阵  $Q$  使

$$A = PBQ.$$

**【推论2】** 可逆矩阵总可以经过一系列初等行矩阵变化为单位矩阵。

姐





**【定理】**  $n$ 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定的充分必要条件是它的正惯性指数等于 $n$ .

**【定理】** 实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X^T A X$$

是正定的充分必要条件为矩阵 $A$ 的顺序主子式全大于零.

**【定理】** 对于实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 其中 $A$ 是实对称的, 下列条件等价:

- (1)  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半正定的;
- (2) 它的正惯性指数与秩相等;
- (3) 有实可逆矩阵 $C$ , 使

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_3 \end{pmatrix},$$

其中 $d_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ ;

- (4) 有实对称矩阵 $C$ , 使

$$A = C^T C;$$

- (5)  $A$ 的所有主子式 (行指标与列指标相同的子式) 皆大于或等于零.



## 第六章 线性空间

**【定理1】** 如果在线性空间 $V$ 中有 $n$ 个线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 且 $V$ 中任意向量都可以经他们线性表出, 那么 $V$ 是 $n$ 维的, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 就是 $V$ 的一组基.

**【定理2】** 如果线性空间 $V$ 的非空子集合 $W$ 对于 $V$ 的两种运算是封闭的, 也就是满足 $\forall \alpha, \beta \in W$ , 有 $\alpha + \beta \in W, \forall k \in \mathbb{P},$ 有 $k\alpha \in W$ , 那么 $W$ 就是一个子空间.

**【定理3】** (1) 两个向量组生成相同子空间的充分必要条件是这两个向量组等价;

(2)  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的秩.

**【定理4】** 设 $W$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个 $m$ 为子空间,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $W$ 的一组基, 那么这组向量必定可扩充为整个空间的基, 也就是说, 在 $V$ 中必定可以找到 $n - m$ 个向量 $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$ , 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $V$ 的一组基.

**【定理5】** 如果 $V_1, V_2$ 是线性空间 $V$ 的两个子空间, 那么他们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 $V$ 的子空间.

**【定理6】** 如果 $V_1, V_2$ 是线性空间 $V$ 的子空间, 那么它们的和 $V_1 + V_2$ 也是 $V$ 的子空间.

**【定理7】 (维数公式)** 如果 $V_1, V_2$ 是线性空间 $V$ 的两个子空间, 那么

$$\text{维}(V_1) + \text{维}(V_2) = \text{维}(V_1 + V_2) + \text{维}(V_1 \cap V_2)$$

**【定理8】** 和 $V_1 + V_2$ 是直和的充分必要条件是等式

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_i \in V_i, \quad i = 1, 2$$

只有在 $\alpha_i$ 全为零向量时才成立.

**【推论】** 和 $V_1 + V_2$ 为直和的充分必要条件是

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$



**【定理9】** 设 $V_1, V_2$ 是 $V$ 的子空间, 令 $W = V_1 + V_2$ , 则

$$W = V_1 \oplus V_2$$

的充分必要条件为

$$\dim(W) = \dim(V_1) + \dim(V_2).$$

**【定理10】** 设 $U$ 是线性空间 $V$ 的一个子空间, 那么一定存在一个子空间 $W$ , 使 $V = U \oplus W$ .

**【定理11】**  $V_1, V_2, \dots, V_s$ 是 $V$ 的一些子空间, 下面这些条件是等价的:

- (1)  $W = \sum_{i=1}^s V_i$ 是直和;
- (2) 零向量的表法唯一;
- (3)  $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$ ,  $i=1, 2, \dots, s$ ;
- (4)  $\dim(W) = \sum_{i=1}^s \dim(V_i)$ .

**【定理12】** 数域 $P$ 上两个有限线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

微  
云  
学  
姐



## 第七章 线性变换

**【定理1】** 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性空间 $V$ 的一组基,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $V$ 中任意 $n$ 个向量, 存在唯一的线性变换 $\mathcal{A}$ , 使

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**【定理2】** 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是数域 $P$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基, 在这组基下, 每个线性变换按公式 $\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A$ 对应一个 $n \times n$ 矩阵, 这个对应具有以下性质:

- (1) 线性变换的和对应于矩阵的和;
- (2) 线性变换的乘积对应于矩阵的乘积;
- (3) 线性变换的数量乘积对英语矩阵的数量乘积;
- (4) 可逆的线性变换与可逆矩阵对应, 且逆变换对应于逆矩阵.

**【定理3】** 设线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是 $A$ , 向量 $\xi$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 则 $\mathcal{A}\xi$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标 $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 可以按公式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

计算.

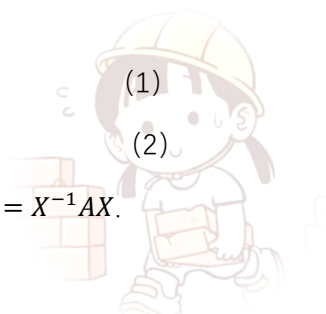
**【定理4】** 设线性空间 $V$ 中线性变换 $\mathcal{A}$ 在两组基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n,$$

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

下的矩阵分别为 $A$ 和 $B$ , 从基 (1) 到 (2) 的过度矩阵是 $X$ , 于是 $B = X^{-1}AX$ .

**【定理5】** 线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似的. 反过来, 如果两个矩阵相似, 那么它们可以看作同一个线性变换在两组基下对应的矩阵.



**【定理6】** 相似的矩阵有相同的特征多项式.

**【哈密顿-凯莱定理】** 设 $A$ 是数域 $P$ 上一 $n \times n$ 矩阵,  $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 是 $A$ 的特征多项式, 则

$$f(A) = A^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})A^{n-1} + \dots + (-1)^n |A|E = 0.$$

**【推论】** 设 $\mathcal{A}$ 是有限维空间 $V$ 的线性变换,  $f(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征多项式, 那么 $f(\mathcal{A}) = 0$ .

**【定理7】** 设 $\mathcal{A}$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个线性变换,  $\mathcal{A}$ 的矩阵可以在某一组基下为对角矩阵的充分必要条件是,  $\mathcal{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

**【定理8】** 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

**【推论1】** 如果在 $n$ 维线性空间 $V$ 中, 线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式在数域 $P$ 中有 $n$ 个不同的根, 即 $\mathcal{A}$ 有 $n$ 个不同的特征值, 那么 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是对角形的.

**【推论2】** 在复数域上的线性空间中, 如果线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式没有重根, 那么 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是对角形的.

**【定理9】** 如果 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 是线性变换 $\mathcal{A}$ 的不同的特征值, 而 $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ir_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), 是属于特征值 $\lambda_i$ 的线性无关的特征向量, 那么向量组 $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1r_1}, \dots, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kr_k}$ 也线性无关.

**【定理10】** 设 $\mathcal{A}$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的线性变换,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 $V$ 的一组基, 在这组基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是 $A$ , 则

(1)  $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}V$ 是由基像组生成的子空间, 即

$$\mathcal{A}V = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n);$$

(2)  $\mathcal{A}$ 的秩= $A$ 的秩.

**【定理11】** 设 $\mathcal{A}$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的线性变换, 则 $\mathcal{A}V$ 的一组基的原像及 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的一组基合起来就是 $V$ 的一组基. 由此还有

$$\mathcal{A} \text{的秩} + \mathcal{A} \text{的零度} = n$$



**【推论】** 对于有限维线性空间的线性变换，它是单射的充分必要条件为它是满射。

**【定理12】** 设线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$ ，它可分解成一次因式的乘积

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

则 $V$ 可分解成不变子空间的直和

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s,$$

其中 $V_i = \{\xi \in V | (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{r_i} \xi = 0\}$ .

**【定理13】** 设 $\mathcal{A}$ 是复数域上 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个线性变换，则 $V$ 中一定存在一组基， $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当矩阵，称为 $\mathcal{A}$ 的若尔当标准形。

**【定理14】** 每个 $n$ 阶复矩阵 $A$ 一定与一个若尔当矩阵相似。这个若尔当矩阵除去其中若尔当块的排列顺序外由 $A$ 唯一决定，称为 $A$ 的若尔当标准形。

**【引理1】** 矩阵 $A$ 的最小多项式是唯一的。

**【引理2】** 设 $g(x)$ 是矩阵 $A$ 的最小多项式，那么 $f(x)$ 以 $A$ 为根的充分必要条件是 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 。

**【引理3】** 设 $A$ 是一个准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix},$$

并设 $A_1$ 的最小多项式为 $g_1(x)$ ， $A_2$ 的最小多项式为 $g_2(x)$ ，那么 $A$ 的最小多项式为 $g_1(x)$ ， $g_2(x)$ 的最小公倍式 $[g_1(x), g_2(x)]$ 。

**【引理4】**  $k$ 阶若尔当块

$$J = \begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & a & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}$$

的最小多项式为 $(x - a)^k$ 。



**【定理15】** 数域 $P$ 上 $n$ 阶矩阵 $A$ 与对角矩阵相似的充分必要条件为 $A$ 的最小多项式是 $P$ 上互素的一次因式的乘积.

**【推论】** 复矩阵 $A$ 与对角矩阵相似的充分必要条件是 $A$ 的最小多项式没有重根.

微  
云  
学  
姐





**【引理2】** 对于任何不为零的 $n \times n$ 数字矩阵 $A$ 和 $\lambda$ -矩阵 $U(\lambda)$ 与 $V(\lambda)$ ，一定存在 $\lambda$ -矩阵 $Q(\lambda)$ 与 $R(\lambda)$ 以及数字矩阵 $U_0$ 和 $V_0$ ，使

$$U(\lambda) = (\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0,$$

$$V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda E - A) + V_0.$$

**【定理7】** 设 $A, B$ 是数域 $P$ 上两个 $n \times n$ 矩阵， $A$ 与 $B$ 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda E - A$ 和 $\lambda E - B$ 等价.

**【推论】** 矩阵 $A$ 与 $B$ 相似的充分必要条件是它们有相同的不变因子.

**【定理8】** 两个同阶复矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

**【引理】** 设

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

如果多项式 $f_1(\lambda)$ ， $f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda)$ ， $g_2(\lambda)$ 互素，则 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 等价.

**【定理9】** 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda E - A$ 为对角形，然后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，则所有这些一次因式的方幂（相同的按出现的次数计算）就是 $A$ 的全部初等因子.

**【定理10】** 每个 $n$ 阶的复矩阵 $A$ 都与一个若尔当形矩阵相似，这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被矩阵 $A$ 唯一决定的，它称为 $A$ 的若尔当标准形.

**【定理11】** 设 $\mathcal{A}$ 是复数域上 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换，在 $V$ 中必定存在一组基，使 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当标准形，并且这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被 $\mathcal{A}$ 唯一决定的.

**【定理12】** 复矩阵 $A$ 与对角矩阵相似的充分必要条件是， $A$ 的初等因子全为一次的.

**【定理13】** 复矩阵 $A$ 与对角矩阵相似的充分必要条件是， $A$ 的不变因子都没有重根.

**【引理】**  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$  中矩阵 $A$ 的不变因子为 $1, 1, \dots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_s(\lambda)$ , 其中1的个数等于 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_s(\lambda)$ 的次数之和减去 $s$ .

**【定理14】** 数域 $P$ 上 $n \times n$ 方阵 $A$ 在 $P$ 上相似于唯一的一个有理标准形，称为 $A$ 的有理标准形.

**【定理15】** 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $P$ 上 $n$ 维线性空间的线性变换，则在 $V$ 中存在一组基，使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是有理标准形，并且这个有理标准形由 $\mathcal{A}$ 唯一决定，称为 $\mathcal{A}$ 的有理标准形.

微  
云  
学  
姐



## 第九章 欧几里得空间

**【定理1】**  $n$ 为欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.

**【定理2】** 对 $n$ 维欧氏空间中任意一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ,都可以找到一组标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ,使

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**【定理3】** 两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件式它们的维数相同.

**【定理4】** 设 $\mathcal{A}$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的一个线性变换, 于是下面四个命题是相互等价的:

- (1)  $\mathcal{A}$ 是正交变换;
- (2)  $\mathcal{A}$ 保持向量长度不变, 即对于 $\alpha \in V, |\mathcal{A}\alpha| = |\alpha|$ ;
- (3) 如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是正交基, 那么 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基;
- (4)  $\mathcal{A}$ 在任意一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

**【定理5】** 如果子空间 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 两两正交, 那么和 $V_1 + V_2 + \dots + V_s$ 是直和.

**【定理6】**  $n$ 维欧氏空间 $V$ 的每一个子空间 $V_1$ 都有唯一的正交补.

**【推论】**  $V_1^\perp$ 恰由所有与 $V_1$ 正交的向量组成.

**【引理1】** 设 $A$ 是实对称矩阵, 则 $A$ 的复特征值皆为实数.

**【引理2】** 设 $A$ 是实对称矩阵 $A$ ,  $\mathcal{A}$ 是 $n$ 维欧氏空间 $R^n$ 上的一个线性变换, 则对任意 $\alpha, \beta \in R^n$ , 有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta),$$

或

$$\beta^\perp(\mathcal{A}\alpha) = \alpha^\perp \mathcal{A}\beta.$$



**【引理3】** 设 $\mathcal{A}$ 是对称变换， $V_1$ 是 $\mathcal{A}$ -子空间，则 $V_1^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ -子空间.

**【引理4】** 设 $A$ 是实对称矩阵，则 $R^n$ 中属于 $A$ 的不同特征值的特征向量必正交.

**【定理7】** 对于任意一个 $n$ 阶实对称矩阵 $A$ ，都存在一个 $n$ 阶正交矩阵 $T$ ，使 $T^{-1}AT = T^{-1}AT$ 成对角形.

**【定理8】** 任意一个实二次型

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

都可以经过正交的线性替换变成平方和

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

其中平方项的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 就是矩阵 $A$ 的特征多项式全部的根.

微  
云  
学  
姐



## 第十章 双线性函数与辛空间

**【定理1】** 设 $V$ 是 $P$ 上一个 $n$ 维线性空间， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 $V$ 的一组基， $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 $P$ 中任意 $n$ 个数，存在唯一的 $V$ 上线性函数 $f$ ，使

$$f(\varepsilon_i) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**【引理】** 对 $V$ 中任意向量 $\alpha$ ，有

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha)\varepsilon_i,$$

而对 $L(V, P)$ 中任意向量，有

$$f = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)f_i.$$

**【定理2】**  $L(V, P)$ 的维数等于 $V$ 的维数，而且 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 是 $L(V, P)$ 的一组基。

**【定理3】** 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 及 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是线性空间 $V$ 的两组基，它们的对偶基分别为 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 及 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 。如果由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过度矩阵为 $A$ ，那么由 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 到 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 的过度矩阵为 $(A^T)^{-1}$ 。

**【定理4】**  $V$ 是一个线性空间， $V^{**}$ 是 $V$ 的对偶空间的对偶空间， $V$ 到 $V^{**}$ 的映射是一个同构映射。

**【定理5】** 设 $V$ 是数域 $P$ 上 $n$ 维线性空间， $f(\alpha, \beta)$ 是 $V$ 上的对称双线性函数，则存在 $V$ 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ，使 $f(\alpha, \beta)$ 在这组基下的度量矩阵为对角矩阵。

**【推论1】** 设 $V$ 是复数域上 $n$ 维线性空间， $f(\alpha, \beta)$ 是 $V$ 上对称双线性函数，则存在 $V$ 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ，对 $V$ 中任意向量 $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i, \beta = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$ ，有

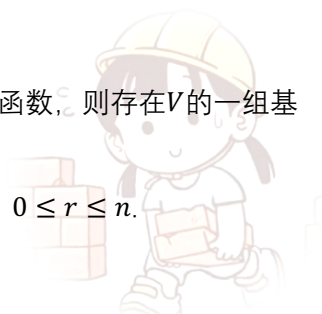
$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_r y_r, \quad 0 \leq r \leq n.$$

**【推论2】** 设 $V$ 是实数域上 $n$ 维线性空间， $f(\alpha, \beta)$ 是 $V$ 上对称双线性函数，则存在 $V$ 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ，对 $V$ 中任意向量 $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i, \beta = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$ ，有

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_r y_r, \quad 0 \leq p \leq r \leq n.$$

B站/公众号/小红书：微云学姐

数学专业表白墙：1561576248 (QQ)



**【定理6】** 设  $f(\alpha, \beta)$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的反称双线性函数，则存在  $V$  的一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-r}, \eta_1, \dots, \eta_s$ , 使

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i, \varepsilon_{-i}) = 1, & i = 1, 2, \dots, r; \\ f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & i + j \neq 0; \\ f(\alpha, \eta_k) = 0, & \alpha \in V, k = 1, 2, \dots, s. \end{cases}$$

**【定理7】**  $(V, f)$  是辛空间， $W$  是  $V$  的子空间，则

$$\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W).$$

**【定理8】** 设  $L$  是辛空间  $(V, f)$  的拉格朗日子空间， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是  $L$  的基，则它可扩充为  $(V, f)$  的辛正交基.

**【推论】** 设  $W$  是  $(V, f)$  的迷向子空间， $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$  是  $W$  的基，则它可扩充为  $(V, f)$  的辛正交基.

**【定理9】** 辛空间  $(V, f)$  的辛子空间  $(U, f|_U)$  的一组辛正交基可扩充成  $(V, f)$  的辛正交基.

**【定理10】** 令  $(V, f)$  为辛空间， $U$  和  $W$  是两个拉格朗日子空间或两个同维数的辛子空间，则有  $(V, f)$  的辛变换把  $U$  变成  $W$ .

**【维特 (Witt) 定理】** 辛空间  $(V, f)$  的两个子空间  $U$  与  $W$  间若有等距，则此等距可扩充成  $(V, f)$  的一个辛变换.

**【定理11】** 设  $\mathcal{H}$  是  $2n$  维辛空间中的辛变换， $K$  是  $\mathcal{H}$  在某辛正交基下矩阵，则它的特征多项式  $f(\lambda) = |\lambda E - K|$  满足  $f(\lambda) = \lambda^{2n} f(\frac{1}{\lambda})$ . 若设

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} \lambda + a_{2n},$$

则  $a_i = a_{2n-i} (i = 0, 1, \dots, n)$ .

**【定理12】** 设  $\lambda_i, \lambda_j$  是数域  $P$  上辛空间  $(V, f)$  上辛变换  $\mathcal{H}$  在  $P$  中的特征值，且  $\lambda_i \lambda_j \neq 1$ . 设  $V_{\lambda_i}, V_{\lambda_j}$  是  $V$  中对应于特征值  $\lambda_i$  及  $\lambda_j$  的特征子空间. 则  $\forall u \in V_{\lambda_i}, v \in V_{\lambda_j}$ , 有  $f(u, v) = 0$ , 即  $V_{\lambda_i}$  与  $V_{\lambda_j}$  的特征子空间，则  $V_{\lambda_i}$  与  $V_{\lambda_j}$  是辛正交的. 特别地，当  $\lambda_i \neq \pm 1$  时， $V_{\lambda_i}$  是迷向子空间.



## 阅读必看

1. 本章内容参考北大版《高等代数》，若发现有误或不严谨之处，请联系 QQ：  
2083439636、2067171647；
2. 数学分析/高等代数定理汇总获取方式：关注微信公众号“微云学姐”，后台私信“定理汇总版”
3. 微云学姐是一位 211 高校数学专业在读研究生，在公众号和 B 站更新数学专业&考研&读研干货，包括但不限于考研经验、考研规划、网课测评、院校分析、书单分享、资料分享、数学科普。期待你的关注，祝金榜题名！



B 站主页

