座位号：

## 杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

| 考试课程 | 离散数学 2 | 考试日期 | 2019 年 月 日 | 成 绩 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 课程号 | A0507042 | 教师号 | | 任课教师姓名 | 陈勤、袁友伟、周丽、吴向阳、陈溪源 |
| 考生姓名 | | 学号（8 位） | | 年级 | | 专业 | |

请将答案填写在答卷纸上。

## 一 判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 整数集合与自然数集合等势，有理数集合与整数集合也等势，因此有理数集合与自然数集合等势。
2. 阶数大于 1 的群没有零元，也不存在等幂元。
3. 偶数阶群必含有 2 次元。
4. P 阶图 G 中，若存在通过顶点 v 的闭通道，则一定存在通过 v 的长度小于或等于 p 的回路。
5. 图 G 不能同时具备欧拉开迹和欧拉闭迹，同理，图 G 也不能同时具备哈密尔顿开路和哈密尔顿回路。

## 二 选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 下列关于函数的说法错误的是（ ）。
   A $f: N \to N, f(x) = 2x + 1$ 是单射
   B $f: R \to R^+, f(x) = 2^x$ 是双射
   C $f: Z \to N, f(x) = x^2$ 是满射
   D $f: N \to N \times N, f(x) = <x+1, x>$ 是单射

2. 设函数 $f: X \to Y, g: Y \to Z$，则（ ）
   A 若 $f \circ g$ 满射，则是 f 满射。
   B 若 f 和 g 满射，则 $f \circ g$ 是满射。
   C 若 f 单射，则 $f \circ g$ 是单射。
   D 若 $f \circ g$ 单射，则 g 是单射。

3. 下列关于复合运算的说法正确的是（ ）
   A 它是 $\rho(X \times X)$ 上的二元运算，单位元是恒等关系，零元是空关系，每个元素都有逆元。
   B 它是 $X^X$ 上的二元运算，单位元是恒等函数，零元不存在，每个元素都有逆元。
   C 它是 $\rho(X \times X)$ 上的二元运算，满足消去律。
   D 它是 $X^X$ 上的二元运算，不满足消去律。

4. 下列不属于群的是（ ）。
   A $<Z_5^*, \times_5>$　　B $<Q^*, \times>$
   C $<Z_8^*, +_8>$　　D $<M_n(R), \times>$

5. 下列哪一个不属于群 $<G, +_6>$，G={0, 1, 2, 3, 4, 5} 的子群（ ）。
   A {0, 2, 4}　　B {0, 1, 2, 3, 4, 5}
   C {0, 1, 3}　　D {0, 3}

6. 群 $<G, *>$，$G = \{e, a, a^2 \dots a^{13}\}$ 的生成元有（ ）个。
   A 5　　B 6
   C 7　　D 8

7. 图 G 有 12 条边，5 度顶点 1 个，4 度顶点 2 个，其余顶点的度数均不超过 3，请问下列哪一组不是图 G 可能的度序列？（ ）
   A {5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1}　　B {5, 4, 4, 3, 3, 3, 2}
   C {5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2}　　D {5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1}

8. 关于 p 阶连通图 G 的说法错误的是？（ ）
   A 仅含一个连通分图。
   B 对于 G 中任意两点 u，v，$d(u) + d(v) \ge p - 1$
   C $\lambda(G) \le \delta(G)$
   D 若 (u, v) 是桥，且 $d(u) = 2$，则 u 一定为割点。

9. 图 G 的度序列为 {3, 3, 2, 2, 1, 1}，则图 G 最可能是（ ）
   A 二重图　　B 哈密尔顿图
   C 欧拉图　　D 树

10. 下列哪一组度序列最有可能被简单图化？（ ）
   A {5, 4, 3, 3, 2, 1}　　B {5, 3, 3, 2, 1}
   C {4, 4, 4, 3, 3, 3}　　D {4, 4, 4, 2, 2}

## 三 综合题（共 70 分）

1. （10 分，每题 2 分）群 $<G, *>$，$G = \{e, a, a^2 \dots a^{17}\}$，|a|=18，求
   (1) $|a^{12}|$ 和 $|a^{-2}|$
   (2) 由 $a^3$ 生成的子群 $G_1$
   (3) 求 $[G:G_1]$
   (4) 求 $G_1$ 中的所有生成元
   (5) 求满足 $a^x = a^{-10}$ 的整数 x，x 的区间为 [0, 12]

座位号：

2. （12 分，每题 3 分）$<G,\times_7>$，G={1, 2, 3, 4, 5, 6}

（1）给出$<G,\times_7>$ 的运算表

（2）验证$<G,\times_7>$构成群

（3）给出每个元的次数

（4）$<G,\times_7>$是否为循环群，若是则求出所有生成元

$\boxed{6}$　1

3. （9 分，每题 3 分）$<G,+_{12}>$，G={0, 1, 2, ⋯, 11}，H 是由元素 3 生成的子群

（1）求 H

（2）求 H 中每个元素的次数

（3）求 H 在 G 中的所有右陪集

{3, 6, 9, 0}

4. （9 分）群$<G,*>$，H，K 是其子群。定义 G 上的关系 R：

$\mathbf{R}=\{<a,\mathbf{b}>|\forall \mathbf{a},\mathbf{b}\in \mathbf{G},\exists \mathbf{h}\in \mathbf{H},\mathbf{k}\in \mathbf{K},\mathbf{b}=\mathbf{h}*\mathbf{a}*\mathbf{k}\}$

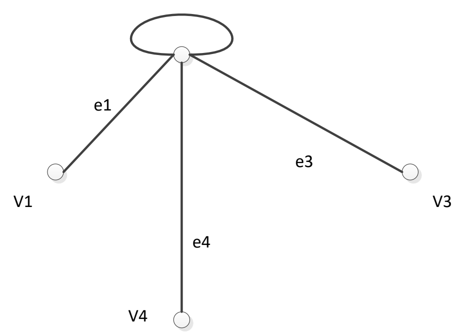
证明 R 是 G 上的等价关系。

5. （14 分，1, 3 每题 4 分，2 题 6 分）(p, q)图如图 G 所示，求

（1）求 G 的关联矩阵

（2）求 G 的邻接矩阵 A，以及 A 的 2 次幂和 3 次幂矩阵。

（3）求顶点 $V_1$到 $V_2$长度小于或等于 3 的通路的条数。




6. （6 分）连通图 G 含有 k 个奇点，证明在图 G 中至少要添加 k/2 条边才能使该图成为欧拉图。

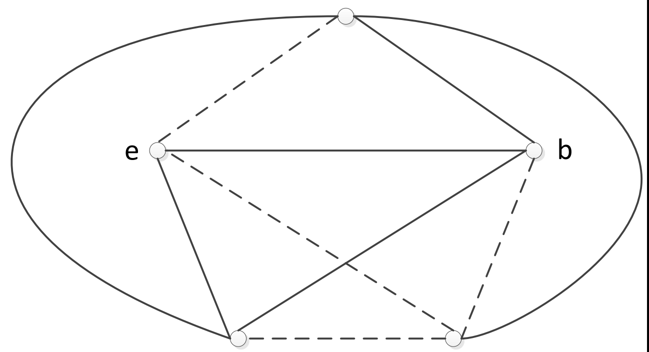
7. （10 分，1, 2, 3 每题 2 分，4 题 4 分）如图 G 所示

（1）求 $\lambda(G)$ 以及 $\kappa(G)$

（2）G 是否为欧拉图，请说明原因。

（3）G 是否为哈密尔顿图，如果是，请指出从 a 开始的哈密尔顿回路，不是请说明理由。

（4）G 中的生成树如图中虚线所示，求枝 ae 的基本割集以及弦 de 的基本回路。



# 杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷——答案及评分标准

## 一 判断题（每小题 2 分，共 10 分）（正确打“√”，错误打“╳”）

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| √ | ╳ | √ | √ | ╳ |

## 二 选择题（每小题 2 分，共 20 分）

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | B | D | C | C | B | D | B | A | A |

## 三 综合题（共 70 分）

**1.** 群$< G,* >$，$G=\{e,a,a^2\ldots a^{17}\}$, |a|=18，求

（1）$|a^{12}|$ 和 $|a^{-2}|$

（2）由 $a^3$ 生成的子群 $G_1$

（3）求$[G:G_1]$

（4）求 $G_1$ 中的所有生成元

（5）求满足 $a^x=a^{-10}$ 的整数 x，x 的区间为[0,12]

**评分标准：10 分，每题 2 分。**

**⑵出错 1 处扣 1 分。**

解：

（1）$|a^{12}| = 3$　　　$|a^{-2}| = 9$

（2）由 $a^3$ 生成的子群 $G_1=\{e,a^3,a^6,a^9,a^{12},a^{15}\}$

（3）$[G:G_1] = 3$

（4）$G_1$ 中的所有生成元：$a^3$，$a^{15}$

（5）满足 $a^x=a^{-10}$ 的整数 x，x 的区间为[0,12]　　$x = 8$

**2.** $< G,\times_7 >$，G={1,2,3,4,5,6}

（1）给出$< G,\times_7 >$ 的运算表

（2）验证$< G,\times_7 >$构成群

（3）给出每个元的次数

（4）$< G,\times_7 >$是否为循环群，若是则求出所有生成元

**评分标准：12 分，每题 3 分，**

**⑴出错 1 处扣 1 分**

**⑵非空、二元运算、结合律 1 分，单位元 1 分，逆元 1 分**

**⑶出错 1 处扣 1 分，可不写单位元的次数**

**⑷是循环群 1 分，两生成元各 1 分。**

解：

（1）$< G,\times_7 >$ 的运算表

| $< G,\times_7 >$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

（2）$< G,\times_7 >$ 构成群

G 是非空集合，$< G,\times_7 >$ 在 G 满足二元运算，$< G,\times_7 >$ 满足结合律

单位元是 1，每个元素均有逆元，3 与 5 互为逆元，2 与 4 互为逆元，6 的逆元是自身

（3）每个元的次数

|1|=1　　|2|=|4|=3　　|3|=|5|=6　　|6|=2

（4）$< G,\times_7 >$是循环群，生成元为 3 和 5

**3.**　$< G,+_{12} >$，G={0, 1, 2, ⋯, 11}，H 是由元素 3 生成的子群

（1）求 H

（2）求 H 中每个元素的次数

（3）求 H 在 G 中的所有右陪集

**评分标准：9 分，每题 3 分，**

**(1) 出错 1 处扣 1 分**

**(2) 出错 1 处扣 1 分，可不写单位元的次数**

**(3) 每个 1 分**

解：

（1）H={0, 3, 6, 9}

（2）|0|=1　|3|= 4　|6|= 2　|9|= 4

（3）求 H 在 G 中的所有右陪集

{0, 3, 6, 9}　{1, 4, 7, 10}　{2, 5, 8, 11}

**4.**　（9 分）

群$< G,* >$，H，K 是其子群。定义 G 上的关系 R：

$\mathrm{R} = \{< a,\mathrm{b} > | \forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}, \exists \mathrm{h} \in \mathrm{H}, \mathrm{k} \in \mathrm{K}, \mathrm{b} = \mathrm{h} * \mathrm{a} * \mathrm{k}\}$

证明 R 是 G 上的等价关系。

**评分标准：9 分，自反，对称，传递各 3 分**

证明：

自反：$\forall a \in G$，e 是 G 的单位元，因 H，K 是 G 的子群，有$e \in H, e \in K$

令 h=k=e，则 a = e*a*e = h*a*k，有$<a,a> \in R$

即 R 是自反的。

对称：$\forall a, b \in G$，若$<a,b> \in R$，则有$h \in H, k \in K$，使得 b= h*a*k

因 H，K 是 G 的子群，有$h^{-1} \in H, k^{-1} \in K$

有 a= $h^{-1}*b*k^{-1}$，即$<b,a> \in R$

即 R 是对称的。

传递：$\forall a, b, c \in G$，若$<a,b>,<b,c> \in R$，则有$h, g \in H, k, l \in K$，

使得 b= h*a*k，c= g*b*l

有 c= g*b*l= g*h*a*k*l= (g*h)*a*(k*l)

又因 H，K 是 G 的子群，有$g * h \in H, k * l \in K$

所以$<a,c> \in R$

即 R 是传递的。

5. (p,q)图如图 G 所示，求

(1) 求 G 的关联矩阵

(2) 求 G 的邻接矩阵 A，以及 A 的 2 次幂和 3 次幂矩阵。

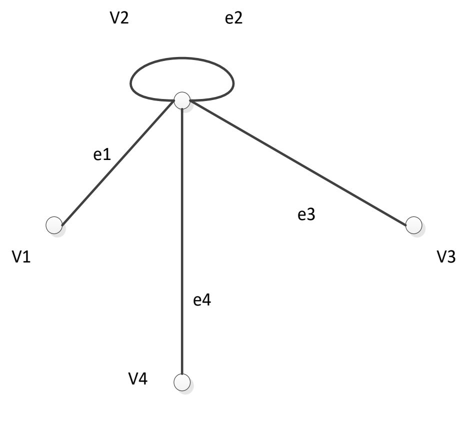
(3) 求顶点 $V_1$ 到 $V_2$ 长度小于或等于 3 的通路的条数。

**评分标准：**14 分，1,3 每题 4 分，2 题 6 分

**(1)出错 1 处扣 1 分**

**(2)每个矩阵 2 分，出错 1 处扣 1 分**

解：




(1) 关联矩阵

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2) 邻接矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 1\\ 4 & 7 & 4 & 4\\ 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(3) $a_{12} + a^2_{12} + a^3_{12} = 6$

6. （6 分）连通图 G 含有 k 个奇点，证明在图 G 中至少要添加 k/2 条边才能使该图成为欧拉图。

**评分标准，以下每点各 2 分。**

证明：

(1) 由握手定理可知，图中的奇点为偶数个，即 k 为偶数。

(2) 欧拉图中不存在奇点。
(3) 因此，要将 k 个奇点变为偶点，每两个奇点间添加一条边，使之成为偶点。
至少需要在 k 个奇点间添加 k/2 条边。

7. 如图 G 所示
(1) 求 $\lambda(G)$ 以及 $\kappa(G)$
(2) G 是否为欧拉图，请说明原因。
(3) G 是否为哈密尔顿图，如果是，请指出从 a 开始的哈密尔顿回路，不是请说明理由。
(4) G 中的生成树如图中虚线所示，求枝 ae 的基本割集以及弦 de 的基本回路。

**评分标准，10 分，1,2,3 每题 2 分，**
**4 题 4 分，基本割集 2 分，基本回路 2 分，错 1 处扣 1 分。**

**解：**
**(1)** $\lambda(G)=4$ $\kappa(G)=4$
**(2)** 是欧拉图，无奇点
**(3)** 是哈密尔顿图，哈密尔顿回路为 a-b-c-d-e-a
**(4)** ae 确定的基本割集为{(a,e),(a,d),(a,b),(a,c)}
de 确定的基本回路为：d-e-c-d